

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

**CONTROLE POR MODO DESLIZANTE DE ROBÔS
MÓVEIS SOBRE RODAS**

Tese submetida à Universidade Federal de
Santa Catarina como parte dos requisitos
para a obtenção do grau de Doutor em
Engenharia de Automação e Sistemas.

Ebrahim Samer El youssef

Florianópolis, 30 de setembro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

**CONTROLE POR MODO DESLIZANTE DE ROBÔS
MÓVEIS SOBRE RODAS**

Tese submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas.

Ebrahim Samer El youssef

Orientador: Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr.
Coorientador: Prof. Ubirajara Franco Moreno, Dr.

Florianópolis, 30 de setembro de 2013.

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

El youssef, Ebrahim Samer

Controle por modo deslizante de robôs móveis sobre rodas
/ Ebrahim Samer El youssef ; orientador, Edson Roberto De
Pieri ; co-orientador, Ubirajara Franco Moreno. -
Florianópolis, SC, 2013.

192 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. robôs móveis
sobre rodas, robôs não holonômicos, controle por modos
deslizantes, rastreamento de trajetórias. I. De Pieri,
Edson Roberto. II. Franco Moreno, Ubirajara. III.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. IV. Título.

CONTROLE POR MODO DESLIZANTE DE ROBÔS MÓVEIS SOBRE RODAS

Ebrahim Samer El youssef

Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Automação e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 26 de Junho de 2013.

Prof. Jomi Fred Hübner , Dr.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Edson Roberto De Pieri, Dr. - DAS/UFSC
Orientador

Prof. Ubirajara Franco Moreno, Dr. - DAS/UFSC
Coorientador

Prof. Aldayr Dantas de Araújo, Dr. - DCA/UFRN

Prof. Guilherme Vianna Raffo, Dr. - DELT/UFMG

Prof. Henrique Simas, Dr. - EMC/UFSC

Prof. Julio Elias Normey Rico, Dr. - DAS/UFSC

Prof. Marcelo Ricardo Stemmer, Dr. - DAS/UFSC

A meus pais e irmã
Ali Mohamed El youssef
Lizeth Alves de Sousa El youssef
Helen Cristine de Sousa El youssef

Agradecimentos

Primeiramente e em especial meus agradecimentos são destinados a minha família, meu pai, Ali Mohamed El youssef, minha mãe, Lizeth Alves de Sousa El youssef, e minha irmã Helen Cristine El youssef, pois sem o apoio, o carinho e o amor deles eu não teria atingido a conquista do título de doutor com a conclusão deste trabalho.

Ao final do ciclo de tese, eu não poderia deixar de dar destaque com agradecimentos a minha família de amigos que me apoiaram, me ajudaram, foram amigos, muito mais que isto foram família, alguns mais próximos, outros mais distância, mas sempre muito queridos. Se fosse citar todos seria uma lista longa, assim gostaria de lembrar dos mais próximos Marcus Americano, Warody Lombardi, Douglas Bertol, Tito Santos, Bernardo Ordoñez, Helton Scherer, Victor Barasuol, Nardênio Martins, Guilherme Raffo e André Tahim.

Meus agradecimentos especiais a Vanessa Duarte por me alegrar, me confortar, ser parceira e afetuosa.

Reservo espaço especial para agradecer ao meu orientador Prof. Edson Roberto De Pieri, a quem agradeço pelas orientações e pela amizade ao longo da minha vida de pós-graduação, da mesma forma que sou grato ao Prof. Ubirajara Franco Moreno, que me acompanhou desde o mestrado como orientador até o doutorado como co-orientador. Ademais, sou grato ao Prof. Marc Jungers do Institut polytechnique de Lorraine, por me receber e orientar durante meu estágio de doutorado sanduíche na França.

Gostaria também deixar registrado meus agradecimentos aos professores Eugênio de Bona Castelan e Julio Normey Rico que tiveram lugar marcante durante minhas atividades de pós-graduação. Além deles, sou grato ao pessoal das secretárias do DAS, cujo apoio foi sempre imprescindível, destaco assim a Nelly Brandt, Marlos Tarcísio Gerber e Enio Snoijer.

Por fim, agradeço as agências fomentadoras CNPq e Capes que viabilizaram a realização deste trabalho.

Controle por Modo Deslizante de Robôs Móveis sobre Rodas

Ebrahim Samer Elyoussef

30 de setembro de 2013

Orientador: Prof. Edson R. De Pieri, Dr.

Co-orientador: Prof. Ubirajara F. Moreno, Dr.

Área de concentração: Automação e Sistemas.

Palavras-chave: Controle por Modo Deslizante, Robótica Móvel, Sistemas Não holonômicos, Sistemas Não Lineares, *Chattering*.

RESUMO: O controle de robôs móveis não holonômicos é um problema para o qual existem lacunas a serem preenchidas. As principais técnicas de controle têm desempenho limitado no tocante à robustez e implementação prática e ainda dificuldades no tratamento de restrições não holonômicas. O controle por modo deslizante é uma técnica que se mostra bastante adequada para tratar este problema, devido a sua característica de oferecer robustez restringindo o sistema. Todavia, a implementação prática da sua forma clássica, o controle por modos deslizantes de primeira ordem, sofre com efeitos de *chattering*, devido à excitação de dinâmicas rápidas negligenciadas e a limitação na frequência de chaveamento do sinal de controle. Algumas soluções conhecidas para compensar o *chattering* têm como desvantagem a redução de robustez. Uma técnica de controle por modo deslizante de segunda ordem é considerada como solução, pois minimiza o *chattering* mantendo suas propriedades de robustez. Trata-se do algoritmo *super-twisting* que além das características enumeradas, possui implementação simples e tem bom desempenho numérico. Neste trabalho, aborda-se o problema de controle de rastreamento de trajetória para um robô móvel sujeito a restrições não holonômicas cuja representação de estado é feita com um modelo cinemático em cascata com um modelo dinâmico. A solução proposta nesta tese é a síntese de uma estrutura de controle composta por um controlador cinemático e um controlador dinâmico. O controlador cinemático é sintetizado com a técnica de controle *super-twisting* e tem como principal produto restrições que ao serem impostas ao sistema garantem o rastreamento robusto de trajetórias. Para isso, gera um sinal de controle em velocidade a ser rastreado pelo controlador dinâmico, que consiste de uma lei de controle por dinâmica inversa com um controlador externo proporcional e derivativo (PD). O controle PD auxilia na redução de *chattering*, pois sua ação diminui a influência das dinâmicas negligenciadas. Para ilustrar as características dos controladores propostos, são apresentados resultados de simulação e experimentos obtidos em ensaios com um robô móvel sobre rodas diferencial de médio porte.

Sliding Mode Control of Wheeled Mobile Robots

Ebrahim Samer Elyoussef

June 12, 2013

Advisor: Prof. Edson R. De Pieri, Dr.

Co-advisor: Prof. Ubirajara F. Moreno, Dr.

Contratation area: Automatic Control and Systems.

Keywords: Sliding Mode Control, Mobile Robots, Nonlonomic Systems, Nonlinear Systems.

ABSTRACT: The control of mobile robots is still an open problem. The main control techniques have limited performance with respect to robustness and practical implementation and yet some difficulties in handling nonholonomic restrictions. The sliding mode control is a technique that proves to be quite adequate to address this problem, due to its characteristic of offering robustness by constraining the system. However, the practical implementation of the classic form of this technique, the first order sliding mode control, suffers from chattering effects, due to the excitation of neglected fast dynamic and frequency limitation of the switching control signal. Some known solutions to overcome the chattering has the disadvantage of reducing the ideal robustness of the technique. A second order sliding mode control technique is considered as a solution since it minimizes this problem maintaining its robustness properties. This is the super-twisting algorithm that in addition to the features listed, its implementation is simple and has good numerical performance. This work addresses the trajectory tracking control problem for a mobile robot subject to nonholonomic constraints and represented in the state space by a kinematic model in cascade with a dynamic model. The proposed solution in this thesis is the synthesis of a control structure comprising a kinematic controller and a dynamic one. The kinematic controller is designed with the super-twisting control technique and has as main product restrictions that when imposed to the system ensure the robust trajectory tracking. For that, it generates a velocity control signal to be tracked by the dynamic controller, which consists of an inverse dynamic control law with proportional plus derivative (PD) control. The additional PD control law plays an important role in assisting in the reduction of chattering, as its action decreases the influence of neglected dynamics. To illustrate the characteristics of the proposed controllers, simulation and also experimental results are obtained in trials with a differential wheeled mobile robot.

Sumário

| | |
|--|--------------|
| Lista de Figuras | xix |
| Lista de Tabelas | xxv |
| Lista de Abreviaturas e Siglas | xxvii |
| Lista de Símbolos | xxix |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Objetivo Geral | 7 |
| 1.2 Objetivos Específicos | 7 |
| 1.3 Organização do Trabalho | 9 |
| 2 Modelo do Robô Móvel sobre Rodas Diferencial | 11 |
| 2.1 Preliminares | 12 |
| 2.2 Modelo de Configuração com Atuadores | 14 |
| 2.2.1 Descrição e Suposições | 14 |
| 2.2.2 Modelagem Cinemática | 23 |
| 2.2.3 Modelagem Dinâmica | 26 |
| 2.2.4 Modelo do Circuito Elétrico | 30 |
| 2.2.5 Modelo de Configuração no Espaço de Estado | 30 |
| 2.3 Modelo de Postura | 33 |
| 2.3.1 Descrição e Suposições | 33 |
| 2.3.2 Modelagem Cinemática | 37 |
| 2.3.3 Modelagem Dinâmica | 38 |
| 2.3.4 Modelo de Postura em Espaço de Estado | 39 |
| 2.4 Considerações Finais | 40 |
| 3 Fundamentação Preliminar de Controle | 43 |
| 3.1 Controle de Dinâmica Inversa | 43 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2 | Controle por Modo Deslizante | 45 |
| 3.2.1 | Síntese de Superfícies Deslizantes | 49 |
| 3.2.2 | Princípio de Invariância | 51 |
| 3.2.3 | Controle por Modo Deslizante de Primeira Ordem | 52 |
| 3.2.4 | Controle por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite | 53 |
| 3.2.5 | Controle por Modo Deslizante de Segunda Ordem | 54 |
| 3.3 | Conclusão | 59 |
| 4 | Controle do Robô Móvel sobre Rodas Diferencial | 61 |
| 4.1 | Descrição do Problema e Proposta de Controle | 62 |
| 4.2 | Síntese do Controle Dinâmico | 68 |
| 4.3 | Síntese dos Controladores Cinemáticos | 71 |
| 4.3.1 | Formulação da Estratégia de Rastreamento de Controle | 72 |
| 4.3.2 | Síntese da Superfície de Deslizamento | 74 |
| 4.3.3 | Síntese das Leis de Controle por Modo Deslizante | 78 |
| 4.3.4 | Controle Cinemático por Modo Deslizante de Segunda Ordem Super-Twisting | 86 |
| 4.4 | Considerações Finais | 91 |
| 5 | Resultados | 93 |
| 5.1 | Controle de Rastreamento de Trajetórias | 94 |
| 5.2 | Modelos | 97 |
| 5.3 | Controladores | 100 |
| 5.4 | Trajetórias | 102 |
| 5.5 | Cenário Ideal | 104 |
| 5.5.1 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem | 105 |
| 5.5.2 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite | 108 |
| 5.5.3 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Segunda Ordem <i>Super-Twisting</i> | 111 |
| 5.5.4 | Comentários | 114 |
| 5.6 | Cenário Realístico | 115 |
| 5.6.1 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem | 116 |
| 5.6.2 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite | 120 |
| 5.6.3 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Segunda Ordem Super-Twisting | 125 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.6.4 | Comentários | 131 |
| 5.7 | Estudo Experimental com o Powerbot | 133 |
| 5.7.1 | Resultados de Simulação | 135 |
| 5.7.2 | Resultados Experimentais | 141 |
| 5.8 | Considerações Finais | 146 |
| 6 | Conclusões e Perspectivas | 149 |
| 6.1 | Trabalhos Futuros | 151 |
| | Bibliografia | 161 |

Lista de Figuras

| | | |
|------------|---|----|
| Figura 1.1 | Representação planar do RMRD. | 2 |
| Figura 1.2 | Powerbot, robô móvel sobre rodas diferencial..... | 4 |
| Figura 1.3 | Estrutura de controle em cascata para um RMR. | 8 |
| Figura 2.1 | Representação planar do RMRD. | 14 |
| Figura 2.2 | Esquema de um RMRD e suas variáveis..... | 16 |
| Figura 2.3 | RMRD e suas restrições não holonômicas..... | 17 |
| Figura 2.4 | Esquema de uma roda e suas respectivas restrições..... | 18 |
| Figura 2.5 | Esquema de distribuição de velocidades em RMRD. | 18 |
| Figura 2.6 | Esquema de um RMRD e seus centros de inércia | 20 |
| Figura 2.7 | Representação esquemática de um motor DC Brush. | 22 |
| Figura 2.8 | Representação planar do RMRD. | 34 |
| Figura 3.1 | Diagrama do processo de síntese de superfície deslizante. . | 49 |
| Figura 3.2 | Gráfico da função sinal. | 53 |
| Figura 3.3 | Representação do controle com camada limite. | 54 |
| Figura 3.4 | Resposta do termo de controle u_1 | 58 |
| Figura 3.5 | Plano de fase do algoritmo <i>super-twisting</i> | 58 |
| Figura 4.1 | Estrutura de controle em cascata para um RMR. | 67 |
| Figura 4.2 | Diagrama de blocos do sistema integrador | 70 |
| Figura 4.3 | Estratégia de rastreamento de referência | 71 |
| Figura 4.4 | Erros x_e e y_e sob CMD1 | 82 |
| Figura 4.5 | Sinal de erro θ_e sob CMD1 | 82 |
| Figura 4.6 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob CMD1 | 82 |
| Figura 4.7 | Ampliação dos sinais de $\sigma(\xi_e)$ | 83 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figura 4.8 | Sinal de controle v . | 83 |
| Figura 4.9 | Sinal de controle w . | 83 |
| Figura 4.10 | Sinais dos erros x_e e y_e sob CMD1 com camada limite. | 85 |
| Figura 4.11 | Sinal do erro θ_e sob CMD1 com camada limite. | 85 |
| Figura 4.12 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob CMD1 com camada limite. | 85 |
| Figura 4.13 | Ampliação dos sinais de $\sigma(\xi_e)$. | 86 |
| Figura 4.14 | Sinal de controle v com camada limite. | 86 |
| Figura 4.15 | Sinal de controle w com camada limite. | 86 |
| Figura 4.16 | Sinais dos erros x_e e y_e sob CMD2 <i>super-twisting</i> . | 89 |
| Figura 4.17 | Sinal de erro θ_e sob CMD2 <i>super-twisting</i> . | 89 |
| Figura 4.18 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob CMD2 <i>super-twisting</i> . | 90 |
| Figura 4.19 | Ampliação dos sinais de $\sigma(\xi_e)$. | 90 |
| Figura 4.20 | Sinal de controle <i>super-twisting</i> v . | 91 |
| Figura 4.21 | Sinal de controle <i>super-twisting</i> w . | 91 |
| Figura 5.1 | Estrutura de controle em cascata para um RMR. | 95 |
| Figura 5.2 | Trajatória C1 do RMRD com CMD1. | 105 |
| Figura 5.3 | Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1. | 106 |
| Figura 5.4 | Sinal do erro θ_e com CMD1. | 106 |
| Figura 5.5 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1. | 106 |
| Figura 5.6 | Sinal da velocidade linear do RMRD com CMD1. | 107 |
| Figura 5.7 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1. | 107 |
| Figura 5.8 | Trajatória C1 do RMRD com CMD1 com camada limite. | 108 |
| Figura 5.9 | Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1 com camada limite. | 109 |
| Figura 5.10 | Sinal do erro θ_e com CMD1 com camada limite. | 109 |
| Figura 5.11 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1 com camada limite. | 109 |
| Figura 5.12 | Sinal de controle linear v_c do RMRD com CMD1 com camada limite. | 110 |
| Figura 5.13 | Sinal de controle angular w_c com CMD1 com camada limite. | 110 |
| Figura 5.14 | Trajatória C1 sob controle <i>super-twisting</i> . | 111 |
| Figura 5.15 | Sinais dos erros x_e e y_e sob controle <i>super-twisting</i> . | 112 |
| Figura 5.16 | Sinal do erro θ_e sob controle <i>super-twisting</i> . | 112 |
| Figura 5.17 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob controle <i>super-twisting</i> . | 112 |
| Figura 5.18 | Sinal de controle linear v do RMRD sob controle <i>super-</i> | |

| | | |
|-------------|---|-----|
| | <i>twisting</i> | 113 |
| Figura 5.19 | Sinal de controle angular w_c sob controle <i>super-twisting</i> ... | 113 |
| Figura 5.20 | Diagrama dos tempos de amostragem das malhas de controle do robô..... | 116 |
| Figura 5.21 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1..... | 117 |
| Figura 5.22 | Sinal de controle linear v_c do RMRD com CMD1..... | 118 |
| Figura 5.23 | Sinal de controle angular w_c com CMD1..... | 118 |
| Figura 5.24 | Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1..... | 119 |
| Figura 5.25 | Sinal do erro θ_e com CMD1..... | 119 |
| Figura 5.26 | Trajetória C1 do RMRD com CMD1 com camada limite... .. | 120 |
| Figura 5.27 | Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1 com camada limite. . . | 121 |
| Figura 5.28 | Sinal do erro θ_e com CMD1 com camada limite. | 121 |
| Figura 5.29 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1 com camada limite..... | 122 |
| Figura 5.30 | Sinal de controle angular w_c com CMD1 com camada limite. | 122 |
| Figura 5.31 | Sinal de velocidade linear v do RMRD com CMD1 com camada limite. | 122 |
| Figura 5.32 | Sinal de velocidade angular w com CMD1 com camada limite. | 123 |
| Figura 5.33 | Sinal de controle linear v_c do RMRD com CMD1 com camada limite. | 123 |
| Figura 5.34 | Trajetória M do RMRD com CMD1 com camada limite. . . | 124 |
| Figura 5.35 | Erros x_e e y_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite. | 124 |
| Figura 5.36 | Erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite. | 124 |
| Figura 5.37 | Ampliação dos erros x_e e y_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite. | 125 |
| Figura 5.38 | Ampliação do erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite. | 125 |
| Figura 5.39 | Trajetória C1 sob controle <i>super-twisting</i> | 126 |
| Figura 5.40 | Sinais dos erros x_e e y_e sob controle <i>super-twisting</i> | 127 |
| Figura 5.41 | Sinal do erro θ_e sob controle <i>super-twisting</i> | 127 |
| Figura 5.42 | Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob controle <i>super-twisting</i> | 128 |
| Figura 5.43 | Sinal da velocidade linear v do RMRD sob controle <i>super-twisting</i> | 128 |
| Figura 5.44 | Sinal da velocidade angular w sob controle <i>super-twisting</i> | 128 |
| Figura 5.45 | Sinal de controle linear v_c do RMRD sob controle <i>super-</i> | |

| | | |
|-------------|---|-----|
| | <i>twisting</i> | 129 |
| Figura 5.46 | Sinal de controle angular w_c sob controle <i>super-twisting</i> . . . | 129 |
| Figura 5.47 | Trajatória M do RMRD sob controle <i>super-twisting</i> | 129 |
| Figura 5.48 | Erros x_e e y_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite. | 130 |
| Figura 5.49 | Erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite. 130 | |
| Figura 5.50 | Erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite. 131 | |
| Figura 5.51 | Erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite. 131 | |
| Figura 5.52 | Trajatória C2 com CMD1 com camada limite. | 135 |
| Figura 5.53 | Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1 com camada limite. . . | 136 |
| Figura 5.54 | Sinal do erro θ_e com CMD1 com camada limite. | 136 |
| Figura 5.55 | Velocidade linear v com CMD1 com camada limite. | 136 |
| Figura 5.56 | Velocidade angular w com CMD1 com camada limite. . . . | 137 |
| Figura 5.57 | Trajatória C3 com CMD1 com camada limite. | 137 |
| Figura 5.58 | Trajatória C2 sob controle <i>super-twisting</i> | 138 |
| Figura 5.59 | Sinais dos erros x_e e y_e sob controle <i>super-twisting</i> | 138 |
| Figura 5.60 | Sinal do erro θ_e sob controle <i>super-twisting</i> | 139 |
| Figura 5.61 | Velocidade linear v sob controle <i>super-twisting</i> | 139 |
| Figura 5.62 | Velocidade linear v sob controle <i>super-twisting</i> | 140 |
| Figura 5.63 | Trajatória C3 do Powerbot sob controle <i>super-twisting</i> . . . | 140 |
| Figura 5.64 | Trajatória C2 com CMD1 com camada limite - experimental. | 141 |
| Figura 5.65 | Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1 com camada limite - experimental. | 141 |
| Figura 5.66 | Sinal do erro θ_e com CMD1 com camada limite - experimental. | 142 |
| Figura 5.67 | Velocidade linear v com CMD1 com camada limite - experimental. | 142 |
| Figura 5.68 | Velocidade angular w com CMD1 com camada limite - experimental. | 142 |
| Figura 5.69 | Trajatória C3 com CMD1 com camada limite - experimental. | 143 |
| Figura 5.70 | Trajatória C2 sob controle <i>super-twisting</i> - experimental. . . | 143 |
| Figura 5.71 | Sinais dos erros x_e e y_e sob controle <i>super-twisting</i> - experimental. | 144 |
| Figura 5.72 | Sinal do erro θ_e sob controle <i>super-twisting</i> - experimental. 144 | |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figura 5.73 | Velocidade linear v sob controle <i>super-twisting</i> - experimental..... | 144 |
| Figura 5.74 | Velocidade linear v sob controle <i>super-twisting</i> - experimental..... | 145 |
| Figura 5.75 | Trajectoria C3 sob controle <i>super-twisting</i> | 145 |

Lista de Tabelas

| | | |
|------------|---|-----|
| Tabela 2.1 | Parâmetros do RMRD..... | 23 |
| Tabela 2.2 | Parâmetros nominais do RMRD..... | 37 |
| Tabela 5.1 | Parâmetros nominais do Powerbot, fornecidos pelo fabricante..... | 99 |
| Tabela 5.2 | Parâmetros medidos no Powerbot. | 99 |
| Tabela 5.3 | Parâmetros estimados para o Powerbot..... | 99 |
| Tabela 5.4 | Valores máximos de variáveis do Powerbot..... | 100 |
| Tabela 5.5 | Velocidades de referência para as trajetórias circulares..... | 103 |
| Tabela 5.6 | Valor RMS dos erros de rastreamento dos resultados experimentais..... | 146 |
| Tabela 5.7 | Síntese dos resultados | 148 |

Lista de Abreviaturas e Siglas

| | | |
|------|--|-----|
| RMR | Robô Móvel sobre Rodas | 1 |
| RMRD | Robô Móvel sobre Rodas Diferencial | 2 |
| DAS | Departamento de Automação e Sistemas | 4 |
| CMD | Controle por Modo Deslizante | 5 |
| CMD1 | Controle por Modo deslizante de Primeira Ordem | 6 |
| CMD2 | Controle por Modo Deslizante de Segunda Ordem | 6 |
| PD | Controlador Proporcional mais Derivativo | 8 |
| UFSC | Universidade Federal de Santa Catarina | 100 |

Lista de Símbolos

| | | |
|-----------------|--|----|
| (x, y) | Coordenadas de localização do robô no plano | 3 |
| θ | Coordenada de orientação do robô no plano | 3 |
| v | Velocidade longitudinal do robô | 3 |
| w | Velocidade rotacional do robô | 3 |
| ϕ_r | Deslocamento angular da roda direita | 15 |
| ϕ_l | Deslocamento angular da roda esquerda | 15 |
| ξ | Vetor de coordenadas de postura do robô | 15 |
| q | Vetor de coordenadas de configuração do robô | 16 |
| τ | Vetor de torque nas rodas ou de saída dos motores | 16 |
| τ_r | Torque na roda direita | 16 |
| τ_l | Torque na roda esquerda | 16 |
| i_a | Vetor de correntes de armadura dos motores | 22 |
| i_{a_r} | Corrente de armadura do motor direito | 22 |
| i_{a_l} | Corrente de armadura do motor esquerdo | 22 |
| u_a | Vetor de tensão de armadura dos motores | 22 |
| u_{a_r} | Tensão de armadura do motor direito | 22 |
| u_{a_l} | Tensão de armadura do motor esquerdo | 22 |
| Φ | Vetor de velocidades angulares das rodas | 22 |
| η | Vetor de velocidade longitudinal e rotacional do robô | 37 |
| $\sigma(x) = 0$ | Superfície deslizante | 45 |
| $\sigma(x)$ | Variável de chaveamento | 46 |
| η_c | Sinal de controle cinemático em velocidade | 67 |
| τ_c | Sinal de controle dinâmico em torque | 68 |
| η_e | Vetor de erros de seguimento de velocidade longitudinal e rotacional | 69 |
| η_r | Vetor de referências de velocidades longitudinal e rotacional | 72 |

| | | |
|--------------|--|----|
| ξ_r | Vetor de referências de postura do robô | 72 |
| (x_r, y_r) | Coordenadas de localização do robô de referência | 72 |
| θ_r | Referência de orientação do robô | 72 |
| ξ_e | Vetor de erros de postura do robô. | 72 |
| x_e | Erro de rastreamento em x | 73 |
| y_e | Erro de rastreamento em y | 73 |
| θ_e | Erro de orientação do robô. | 73 |

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos é notório o aumento do impacto criado pela evolução dos robôs sobre aspectos da vida moderna, desde a produção industrial, saúde, transporte e entretenimento à exploração de locais inóspitos [1]. Esse processo teve como pilares, principalmente, o desenvolvimento de dispositivos eletrônicos, de novas tecnologias, da capacidade de processamento, aliados aos avanços teóricos e experimentais no projeto e controle de mecanismos. A robótica evoluiu ao longo do tempo a partir de aplicações em áreas distintas para uma nova área de pesquisa que engloba diversos campos de conhecimento como engenharia de controle e automação, computação, mecânica, elétrica, entre outros.

A robótica de manipulação teve destaque inicial, tanto em pesquisa e desenvolvimento como em aplicações industriais. Manipuladores robóticos garantem a flexibilidade na manufatura de produtos mantendo qualidade e alta produtividade. Entretanto, a idealização de um robô, de forma geral, sempre esteve intrinsecamente ligada à mobilidade, implicando na necessidade de pesquisa e desenvolvimento na área denominada robótica móvel. A mobilidade tem papel importante em complementar as habilidades dos robôs aumentando sua flexibilidade e as aplicações em que se podem empregá-los. Frisa-se que rodas, esteiras e pernas são os principais meios de locomoção empregados na construção de robôs móveis terrestres [1].

A robótica móvel sobre rodas, em geral, possui construções mais simples que as demais. Esse fato associado à variedade de tarefas nas quais se emprega essa classe de robôs justifica o interesse da comunidade científica por esse tipo de sistema. Transporte, robótica de serviço, entretenimento, exploração e operações de segurança são alguns exemplos em que robôs móveis sobre rodas (RMRs) podem ser empregados para obter melhor eficiência e

autonomia.

Um robô móvel sobre rodas, normalmente, é composto de um chassi montado sobre rodas, dentre as quais algumas são atuadas por motores empregando acoplamentos mecânicos e elétricos, realizando movimentos de rolamento e de esterço [2]. Além disso, têm-se os sistemas de sensoriamento e navegação, que englobam sistemas de comunicação, eletrônicos e computacionais, cujas atribuições podem ser classificadas como percepção, tomada de decisão e ação. Dentre essas funções, podem-se destacar o fornecimento de informações de localização, ambiente e orientação do robô, geração de trajetórias, envio e recebimento de comandos e, ainda, gerência do funcionamento do robô.

As características cinemáticas de um robô móvel sobre rodas são definidas pela forma de atuação, disposição e tipo das rodas empregadas em sua construção [2, 3]. De acordo com a estrutura do robô definida por meio dessas características cinemáticas, esse sistema robótico pode ser sujeito a limitações de movimento, conhecidas como restrições não holonômicas. Um exemplo de um sistema não holonômico é o robô móvel sobre rodas diferencial (RMRD), mostrado na Figura 1.1, composto de duas rodas simples atuadas de maneira independente, cujo único movimento é de rolamento, e outras duas rodas livres, cuja função é exclusivamente sustentação. Dessa maneira, esse robô realiza apenas movimentos combinados de deslocamentos longitudinais e rotacionais. Apesar disso, o robô pode atingir qualquer ponto de seu ambiente.

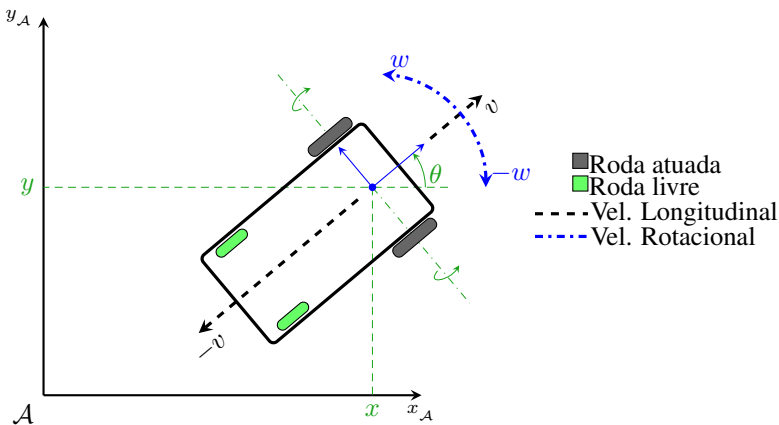


Figura 1.1 – Representação planar do RMRD.

As restrições de movimento são descritas em termos de variáveis de velocidade e, diferente das restrições holonômicas, não podem ser integradas. Esse fato impede que restrições geométricas, que limitam apenas o espaço de operação do robô, sejam obtidas. O termo holonômico, explica Figueiredo e Jota [4], significa “universal”, “integral”, “integrável”. Segundo Murray, Li e Sastry [5], esse termo vem do Grego e literalmente significa “o todo legítimo”. Portanto, restrições de movimento são denominadas não holonômicas, que não são integráveis e, conseqüentemente, um sistema sujeito a esse tipo de restrição recebe o nome de sistema não holonômico.

Além disso, restrições de movimento implicam na limitação do espaço de atuação e, portanto, podem resultar em subatuação do sistema¹, dependendo do número de graus de liberdade. Por exemplo, no caso do RMRD, têm-se três graus de liberdade descritos pela sua localização e orientação no plano cartesiano², (x, y) e θ , e dois graus de atuação, velocidade longitudinal (v) e rotacional (w), conforme mostrado na Figura 1.1. Portanto, enquadra-se em uma classe de sistemas não holonômicos e subatuados.

O estudo e desenvolvimento de técnicas de controle para a classe de sistemas subatuados é importante, pois possibilita o uso de menor número de atuadores permitindo realizar tarefas de sistemas totalmente atuados. Esse fato implica em vantagens como menor peso, menor complexidade construtiva, melhor eficiência energética e menor custo financeiro. Além disso, o desenvolvimento de tais técnicas pode ser útil em casos em que haja falha de algum atuador em sistemas totalmente atuados [7].

A dificuldade de tratar sistemas não holonômicos e subatuados reside no fato de que as restrições não holonômicas impossibilitam regular todos os graus de liberdade do sistema para uma posição desejada de forma instantânea [8]. Isso resulta em uma maior complexidade no desenvolvimento de modelos matemáticos e no controle de movimento do sistema, tanto na construção de trajetórias como no desenvolvimento de controladores.

Em robótica móvel os principais problemas de controle tratados são: (i) a estabilização em um ponto, (ii) o seguimento de caminho em que o robô tem que se deslocar com uma dada velocidade, (iii) e o rastreamento de trajetória em que o robô deve realizar uma trajetória parametrizada no tempo. Para tratar esses problemas são necessários:

- Estudo e representação matemática do comportamento do robô.
- Acesso a informações do sistema e ambiente, dentre as quais se podem

¹Um sistema é dito subatuado se tem menor grau de atuação que grau de liberdade. Apesar das evidências de que um sistema não holonômico implica em um sistema subatuado, opta-se por dizer sistema não holonômico e subatuado, posto que entende-se que esse é um assunto em discussão [6, 7].

²Coordenadas de postura do robô.

destacar localização, orientação e velocidade do robô e localização de obstáculos.

- Trajetórias que possam ser realizadas pelo robô, respeitando suas restrições cinemáticas e dinâmicas;
- Controladores capazes de lidar com as características cinemáticas e dinâmicas do robô influenciadas por limitações de movimento e subatuação, assim como não linearidades.
- Um sistema supervisor para gerir as funções do robô.

Este trabalho tem como foco principal a síntese de controladores considerando o problema de rastreamento de trajetórias em ambiente plano e regular para um robô móvel sobre rodas não holonômico de médio porte sujeito a limitações de atuação, incertezas paramétricas, estruturais e perturbações externas. A principal suposição é que o robô considerado dispõe de um sistema de navegação que cumpre os papéis de gerar trajetórias factíveis ao robô, de gerir o funcionamento dos controladores e as informações do sistema e ambiente fornecidas por um sistema de sensoramento.

O RMRD é tomado como objeto de estudo neste trabalho, pois, apesar de sua estrutura construtiva mecânica ser relativamente simples, representa bem as características da classe de sistemas não holonômicos e subatuados. Além disso, há a disponibilidade desse tipo de robô para fins de pesquisa, como é o caso do Powerbot, um RMRD de médio porte, mostrado na Figura 1.2, que foi adquirido pelo Departamento de Automação e Sistemas (DAS) em março de 2012. Devido a esses fatores esse tipo de robô é largamente empregado como plataforma de teste na literatura [9–26].



Figura 1.2 – Powerbot, robô móvel sobre rodas diferencial.

A natureza do sistema estudado está relacionada às restrições não holonômicas e implica em uma representação matemática em espaço de estado composta por dois modelos: (i) um para representar o comportamento cinemático do robô; (ii) e outro o comportamento dinâmico. As características das restrições não holonômicas e subatuação são refletidas no modelo cinemático e o modelo dinâmico resultante apesar de não linear é complementar atuado.

Em alguns trabalhos o desenvolvimento de controle para esse tipo de robô focou apenas no comportamento cinemático sobre a suposição de que as forças atuantes sobre o robô são desprezíveis e, também, pelo desafio de lidar, especificamente, com as restrições de movimento [9, 10, 15, 27–29]. Entretanto, o tratamento de sistemas em que as forças atuantes têm importância devido à massa e velocidades expressivas exige, necessariamente, considerar o comportamento dinâmico do sistema. Ainda, têm-se as questões relacionadas a incertezas paramétricas e perturbações externas, por exemplo, de carga [17–22, 30–33]. Além disso, alguns trabalhos começaram a levar em conta o comportamento dos atuadores em busca de melhor desempenho de controle [23–26].

Diversas técnicas são empregadas para a síntese de controle de movimento para um RMR, dentre as quais se podem destacar algoritmos baseados em: (i) Funções de Lyapunov [28]; (ii) técnicas de controle adaptativo com leis baseadas em variações de parâmetros [25, 30], algoritmos *Fuzzy* [23] e redes neurais [32]; (iii) algoritmos de controle baseados em técnicas de linearização [10]; (iv) em redes neurais [34, 35]; (v) e em controle *Fuzzy* [36, 37]. Além dessas, merecem destaque as técnicas de controle por modo deslizante [17–19, 21].

Neste trabalho, opta-se pelo desenvolvimento de controle com base nas técnicas de controle por modo deslizante (CMD), devido a suas características de robustez e de utilização de algoritmos de controle simples com bom desempenho numérico e modularidade. Essas propriedades são importantes para o controle de robôs em razão da necessidade de respostas rápidas e robustas para a interação com o meio, dadas às limitações na operação desses dispositivos. Além disso, essas técnicas, por terem como produto leis de controle descontínuas, cumprem as condições de Brockett, que definem que para estabilizar um sistema não holonômico em um ponto de equilíbrio é necessária uma lei de controle variante no tempo, descontínua ou híbrida. Todavia, para a solução de um problema de controle de rastreamento de trajetórias para esse tipo de sistema não é necessário atender a essas condições, sendo possível o uso de técnicas clássicas de controle linear [4, 6, 38].

A ideia básica da técnica de CMD é impor restrições ao sistema de tal forma que esse tenha um comportamento desejado, denominado de modo

deslizante. A forma mais difundida de síntese dessa técnica corresponde às leis de controle de chaveamento em alta frequência que são capazes de forçar as trajetórias do sistema a obedecer às restrições que, normalmente, são sintetizadas na forma de uma superfície. Nessa implementação, a técnica é denominada controle por modo deslizante de primeira ordem (CMD1), pois a variável de controle aparece explicitamente na primeira derivada da superfície escolhida [39].

Idealmente, essa técnica atende ao princípio de invariância, que estabelece que o sistema em malha fechada é invariante a incertezas e perturbações que sejam alcançáveis pelo controle. Contudo, em casos práticos, existem dinâmicas que não foram modeladas e limitações na frequência em que o sinal de controle pode ser chaveado. Tais fatores são os principais causadores do fenômeno de *chattering*, cujas características são oscilações de frequência e amplitude limitadas que surgem sobre as variáveis de estado do sistema. Esse fenômeno indesejado pode ocorrer devido ao sinal de controle de chaveamento excitar dinâmicas rápidas negligenciadas e, também, pela limitação da frequência de chaveamento do sinal de controle [40]. No primeiro caso, existe uma relação entre as oscilações de *chattering* e a constante de tempo das dinâmicas não modeladas [40]. Esse fenômeno é indesejado por causar redução da exatidão de controle, perda de eficiência energética e perdas por desgaste. Além disso, a robustez dessa técnica está intrinsecamente associada à exatidão com que o controle força o sistema a atenda às restrições impostas pela tarefa. Portanto, a existência de *chattering* implica, também, em perda de robustez.

Existem algumas soluções que foram propostas para minimizar esse problema para o CMD1, dentre as quais se destacam a técnica com ganho variável dependente das variáveis de estado do sistema, a técnica baseada em observador que é projetado com CMD1 e a técnica de camada limite em que a função de chaveamento, que é descontínua, é substituída por uma aproximação contínua e que é comumente aplicada na área de robótica móvel [17, 19]. Embora essas soluções sejam eficientes na atenuação de *chattering*, implicam na redução da robustez original da técnica [39].

Não obstante, melhores respostas quando da existência dos fatores que causam *chattering* podem ser atingidas com uma aplicação de controle por modo deslizante de segunda ordem (CMD2) [41–44]. Essa aplicação consiste em solucionar o problema de controle considerando a derivada da variável de entrada do sistema como variável de controle em que é empregado o chaveamento em alta frequência. Dessa forma, são geradas leis de con-

trole contínuas que forcem o sistema ao modo deslizante de segunda ordem³. Além disso, essa aplicação provê maior exatidão de controle frente a limitações no chaveamento do sinal de controle, justamente por forçar um modo deslizante de maior ordem que o CMD1 [44]. Essas duas propriedades garantem ao CMD2 melhor robustez na solução do problema de controle ao ser comparado às soluções com CMD1, em relação aos fatores que podem causar *chattering* e, assim, frente a incertezas e perturbações.

Finalmente, dentre os trabalhos que tratam o problema de rastreamento de trajetórias para robôs móveis sobre rodas por meio da técnica de controle por modo deslizante, podem-se destacar o trabalho de Yang e Kim [17] e o de Chwa [19]. Em ambos os casos, um controlador é sintetizado com base na técnica de CMD1 para convergir erros de posição e velocidade de um RMRD que deve seguir uma trajetória parametrizada no tempo. A técnica de camada limite é empregada para reduzir efeitos prejudiciais de *chattering*. Essa escolha, contudo, acarreta diminuição da robustez conforme já discutido e verificada pelos erros de rastreamento apresentados nesses trabalhos. A favor da técnica de CMD2, pode-se citar o trabalho de Ferrara e Rubagotti [18] em que, embora o problema de rastreamento de trajetória não seja tratado, uma aplicação de CMD para o desvio de obstáculos em um deslocamento aleatório de um ponto a outro para um RMRD é explorada e melhor atenuação de *chattering* é comprovada com a utilização de uma técnica de CMD2, o algoritmo subótimo.

1.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é o projeto de controladores visando contribuir na melhoria da robustez do controle de rastreamento de trajetórias por modo deslizante para o RMRD frente a incertezas paramétricas, perturbações externas de carga, existência de dinâmicas não modeladas, de limitação de chaveamento de controle e limitação de movimentos.

1.2 Objetivos Específicos

A abordagem empregada neste trabalho visa construir um esquema de controle em cascata composto por um controlador dinâmico e um controlador cinemático, conforme é ilustrado na Figura 1.3. Essa estrutura se mostra interessante para a solução de controle desejada em razão da natureza do sistema

³Basicamente, tem-se um modo deslizante de segunda ordem quando é necessário derivar a superfície sintetizada duas vezes no tempo para que a variável de controle apareça explicitamente.

implicar em uma representação em espaço de estado composta por dois modelos distintos, um modelo dinâmico e um cinemático. Abaixo são detalhados os objetivos específicos deste trabalho.

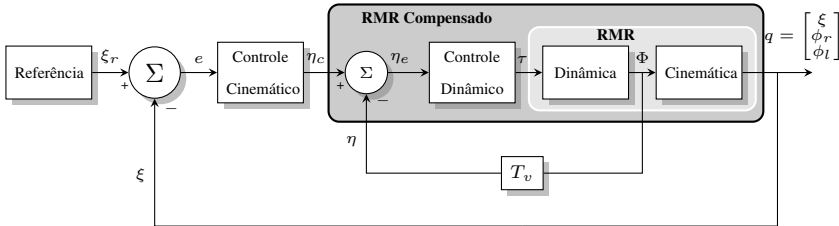


Figura 1.3 – Estrutura de controle em cascata para um RMR.

- Síntese do controlador dinâmico** - O objetivo da síntese do controle dinâmico é compensar as forças conhecidas que atuam sobre o sistema, rastrear a referência de velocidade η_c fornecida pelo controlador cinemático e auxiliar também na atenuação dos efeitos de *chattering* provenientes da excitação de dinâmicas não modeladas. Pretende-se a combinação de um controle de dinâmica inversa com um controlador proporcional mais derivativo em estrutura paralela (PD) .
- Síntese do controlador cinemático** - O controle cinemático tem por objetivo lidar com as restrições de movimento do robô e garantir um rastreamento robusto com erros pequenos. Para atender a esse objetivo será empregada uma técnica de controle por modo deslizante de segunda ordem; o algoritmo *super-twisting*, que em razão de suas propriedades garante melhor resposta frente aos fatores que causam *chattering* e maior grau de robustez comparado a um CMD1. Ademais, a propriedade da técnica CMD de impor restrições é adequada para o tratamento de sistemas subatuados. Portanto, será necessário o desenvolvimento de restrições que contorneie as dificuldades de subatuação e assegurem a robustez desejada.
- Estudo comparativo** - Para a validação da proposta, estudos comparativos serão desenvolvidos entre seis estruturas de controle diferentes. As três primeiras estruturas associam em cascata um controlador dinâmico baseado na técnica de dinâmica inversa com ação proporcional e um dos controladores cinemáticos que serão desenvolvidos com base nas técnicas de: (i) CMD2 *super-twisting*, (ii) CMD1, (iii) e CMD1

com camada limite. As três estruturas restantes compreendem o controlador dinâmico proposto com controle PD em cascata com os controladores cinemáticos relacionados anteriormente. Este estudo contará com:

- **Validação da estrutura de controle por meio de simulações** - Analisar-se-á resultados de simulações obtidos em: (i) um cenário ideal em que o sistema é bem conhecido e existem perturbações externas de carga, e (ii) um cenário real em que o sistema possui dinâmicas não modeladas relativas ao comportamento dos atuadores, incertezas paramétricas, perturbações externas de carga, além de limitações de atuação e amostragem do sistema. Esses cenários serão utilizados para gerar resultados numéricos da aplicação das estruturas de controle em cascata desenvolvidos com as técnicas de CMD1 e CMD2. A comparação desses resultados será utilizada para demonstrar as qualidades da proposta de controle que emprega o algoritmo *super-twisting*.
- **Validação experimental da estrutura de controle** - Serão desenvolvidos e analisados resultados experimentais com a plataforma de teste Powerbot, visando solidificar as conclusões sobre a estrutura de controle proposta.

1.3 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 é apresentada a construção de dois modelos matemáticos em espaço de estado para representar o comportamento do RMRD. O primeiro, denominado de modelo de configuração, engloba além das variáveis de postura do robô, as coordenadas angulares das rodas que permitem a representação adicional do comportamento dos atuadores. Gera-se com isso um modelo detalhado em que se podem considerar as incertezas, perturbações e limitações de atuação e de amostragem. Esse primeiro modelo servirá para a construção do cenário real.

O segundo modelo será utilizado para a síntese dos controladores, denominado de modelo de postura do robô por se limitar às informações de postura do robô, ou seja, localização e orientação no plano cartesiano. O fato de ser mais simples que o anterior implica em menor complexidade na síntese de controle, além de estar de acordo com o objetivo de rastreamento de trajetórias que é dado por meio da posição e orientação do robô ao longo do tempo.

No Capítulo 3 é apresentada a fundamentação teórica das técnicas de controle utilizadas no projeto dos controladores propostos.

As construções dos controladores dinâmicos e cinemáticos que compõem as estruturas de controle utilizadas para o desenvolvimento do trabalho são descritas junto com suas condições de estabilidade no Capítulo 4. Ademais, alguns resultados de simulação, considerando apenas o comportamento cinemático do RMRD e os controladores cinemáticos, são explorados para verificar a propriedade de maior exatidão de controle do CMD2 em relação ao CMD1, frente à limitação de amostragem do sistema.

No Capítulo 5 são considerados o estudo e a análise do desempenho em simulação e experimento do robô quando se utilizam os controladores apresentados. No início do capítulo o problema tratado é lembrado e os modelos, controladores e trajetórias utilizados são sumarizados. Na sequência, estudam-se os resultados de simulação em dois cenários construídos com características ideais e realísticas. No final desse capítulo, a análise do desempenho experimental do robô é apresentada, junto a novas simulações adequadas à estrutura de controle do Powerbot, pois este possui um controlador dinâmico interno PD em estrutura paralela. Embora a estrutura do robô não permita a implementação do controle dinâmico proposto, é adequada para avaliar a combinação das qualidades do CMD2 *super-twisting* com um controlador PD e serve para a validação da proposta.

Por fim, no Capítulo 6 são apresentadas as considerações finais e as perspectivas para a continuidade do trabalho.

Capítulo 2

Modelo do Robô Móvel sobre Rodas Diferencial

Sumário

| | | |
|------------|---|-----------|
| 2.1 | Preliminares | 12 |
| 2.2 | Modelo de Configuração com Atuadores | 14 |
| 2.2.1 | Descrição e Suposições | 14 |
| 2.2.2 | Modelagem Cinemática | 23 |
| 2.2.3 | Modelagem Dinâmica | 26 |
| 2.2.4 | Modelo do Circuito Elétrico | 30 |
| 2.2.5 | Modelo de Configuração no Espaço de Estados | 30 |
| 2.3 | Modelo de Postura | 33 |
| 2.3.1 | Descrição e Suposições | 33 |
| 2.3.2 | Modelagem Cinemática | 37 |
| 2.3.3 | Modelagem Dinâmica | 38 |
| 2.3.4 | Modelo de Postura em Espaço de Estados | 39 |
| 2.4 | Considerações Finais | 40 |

Um robô móvel sobre rodas é constituído de sistemas eletromecânicos, eletrônicos e computacionais. Fisicamente, em geral, é composto de chassi, rodas, atuadores, acoplamentos elétricos e mecânicos, sensores e unidades de processamento. A disposição, forma de atuação, número e tipo de rodas utilizadas podem gerar um estrutura robótica com limitações de movimentos [2].

Os robôs com restrições de movimentos são exemplos de sistemas não holonômicos e subatuados, uma classe cujo grau de atuação é menor do que

o grau de liberdade. O interesse na construção desse tipo de sistema se deve ao fato de empregarem menor número de atuadores para desempenhar tarefas semelhantes às de sistemas totalmente atuados. Desta maneira, têm-se como vantagens menor peso, complexidade de construção e custos em energia e financeiros. Ademais, o desenvolvimento de técnicas de controle para esse tipo de sistema é útil como redundância para o comando de sistemas totalmente atuados em caso de falha de algum atuador, conforme explica Fantoni e Lozano [7].

Um exemplo de sistema não holonômico e subatuado é o robô móvel sobre rodas diferencial (RMRD), em que se têm duas rodas simples dispostas paralelamente sobre um mesmo eixo e com atuação independente por meio de motores DC. Essa estrutura permite velocidades longitudinais e rotacionais para movimentar, posicionar e orientar o robô em um plano e, dessa forma, manipula-se três graus de liberdade com dois graus de atuação.

Uma representação em espaço de estado para robôs móveis não holonômicos é obtida pela composição de seus modelos cinemático e dinâmico. Neste capítulo são mostradas as construções de representações de estados do RMRD para se obter: (i) um modelo de configuração, em que é possível considerar o comportamento dos atuadores e outros detalhes importantes para compor um ambiente de simulação; (ii) e um modelo de postura adequado para a síntese de controle de rastreamento de trajetórias de postura.

2.1 Preliminares

Um robô móvel sobre rodas diferencial (RMRD) é composto de um chassi sobre rodas, dentre as quais, necessariamente, duas são rodas simples fixas e com apenas movimento de rolamento [2]. Elas são montadas paralelamente e alinhadas sobre um mesmo eixo de rotação e são atuadas de forma independente por meio de acoplamentos mecânicos e motores DC e estes são acionados por circuitos elétricos de potência alimentados por um banco de baterias. Além das rodas fixas, têm-se rodas livres utilizadas para auxiliar na sustentação do robô, cuja influência na cinemática do robô é desprezível. O robô conta ainda com: (i) um conjunto de sensores como *encoders*, sonares e câmeras; (ii) sistemas de comunicação; (iii) unidades de processamento de dados; (iv) e sistemas computacionais. Um exemplo deste dispositivo é o Powerbot, um RMRD de médio porte fabricado pela *Adept MobileRobot* que será utilizado para testes experimentais.

A disposição das rodas fixas atuadas desse robô permite que apenas combinações de movimentos longitudinais e rotacionais possam ser realizadas. Esse tipo de limitação de movimento é conhecido como restrição não holonômica. Descritas por equações em termos das velocidades do robô, es-

sas restrições não podem ser integradas e tampouco escritas como restrições geométricas que delimitam o espaço de operação do robô e, portanto, resultam em menor grau de atuação do sistema. Consequentemente, o RMRD enquadra-se na categoria de sistemas não holonômicos subatuados, que é interessante por empregar menor número de atuadores [7].

Uma representação matemática em espaço de estado desse tipo de sistema pode ser obtida pela composição de seu modelo cinemático e dinâmico. Nessa formulação os efeitos das restrições não holonômicas são concentrados no modelo cinemático que é, portanto, subatuado, ao passo que, o modelo dinâmico resultante, descrito em termos de velocidades, é totalmente atuado [2, 45, 46]. Há trabalhos que negligenciam a dinâmica do sistema assumindo-se que a massa e a velocidade do robô são desprezíveis [9–15], todavia, caso sejam expressivas e haja variação de carga e incertezas paramétricas, é necessário considerar o comportamento dinâmico do robô. Muitos trabalhos foram desenvolvidos com modelos cinemáticos e dinâmicos construídos sob o pressuposto de que o robô é um corpo único, desconsiderando o comportamento de atuadores e de outros dispositivos eletrônicos [16–22]. Outros trabalhos englobam, também, a dinâmica dos atuadores buscando melhor desempenho de controle [23–26].

Neste trabalho são apresentadas duas representações em espaço de estado para o RMRD. A primeira consiste do modelo de configuração em que se considera o comportamento mecânico e elétrico dos motores. Esse modelo é utilizado para construir um ambiente para simulações, em que são levadas em conta, também, as limitações de atuação, de amostragem, incertezas e perturbações externas. Desta forma, obtém-se uma representação realística do comportamento do robô, para a avaliação de controladores. A segunda representação consiste em um modelo de postura em que se assume que o robô é um corpo único que pode sofrer a influência de perturbações externas de carga. Esse modelo simplificado será tomado como base para a construção da estrutura de controle de rastreamento robusto de trajetórias que são dadas em coordenadas de postura.

A metodologia adotada para a construção dos modelos consiste na descrição do sistema, destacando suas variáveis de configuração e atuação, seus parâmetros e suas restrições para, então, realizar a construção do modelo cinemático. Na sequência, a modelagem dinâmica é realizada com base na mecânica Lagrangeana com restrições [5] e esses dois modelos são associados para se obter uma representação em espaço de estado adequada para simulações e síntese de controle. Inicia-se o estudo pelo cálculo do modelo de configuração e, em seguida, mostra-se a modelagem em postura. Uma revisão sobre modelagem de robôs móveis sobre rodas pode ser encontrada nos trabalhos de Campion e Chung [2], Coelho e Nunes [46] e Sarkar, Yun e

Kumar [45].

2.2 Modelo de Configuração com Atuadores

Nesta seção é apresentada uma modelagem que visa representar fielmente o comportamento de um RMRD cujo propósito é servir de plataforma para simulações e análises de desempenho de controladores. Descreve-se o modelo de configuração do robô e adiciona-se o comportamento mecânico e elétrico dos motores, conforme feito em alguns trabalhos encontrados na literatura [2, 23–26].

2.2.1 Descrição e Suposições

Para o desenvolvimento do modelo, considera-se que o RMRD possui a estrutura mostrada na Figura 2.1, que é similar à do Powerbot, e ainda que:

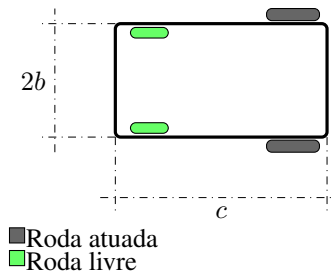


Figura 2.1 – Representação planar do RMRD.

1. O RMRD é formado de três corpos:
 - O chassi tem o formato de um prisma retangular com comprimento representado por c , largura por $2b$ e altura por h , e cuja coordenada do centro de massa é conhecida.
 - Dois conjuntos direito e esquerdo de roda simples atuada e rotor.
2. O contato de cada roda com o chão se reduz a um ponto cuja velocidade é zero. Portanto, não ocorre deslizamento e tampouco derrapagem das rodas.
3. As rodas livres são desconsideradas da modelagem por não influenciarem na cinemática, diferente das rodas simples atuadas cujo raio é representado por r .

4. A dinâmica dos atuadores é considerada na modelagem ao passo que os comportamentos de sensores e de outros equipamentos eletrônicos são negligenciados com a suposição de que seus tempos de resposta são muito menores que os demais tempos de resposta do sistema.
5. O robô opera em ambiente plano conhecido com piso regular.
6. Existem incertezas paramétricas e estruturais relativas aos parâmetros mecânicos e elétricos do robô, como massa, inércia, raio das rodas, medidas geométricas do corpo, dinâmicas não modeladas de sensores, atrito, acoplamentos elétricos e mecânicos entre outros [47].
7. Existem perturbações externas agindo sobre o robô.

Um RMR pode ser separado em um sistema mecânico e em um sistema elétrico. No sistema mecânico, têm-se relações entre variáveis espaciais, massa, inércia, forças e torques. No sistema elétrico, consideram-se apenas os circuitos dos motores, nos quais se tem relações entre correntes elétricas, tensões, resistências, indutâncias e torques.

Iniciando pela descrição do sistema mecânico, as variáveis necessárias para a construção do modelo são as informações de posição, orientação, velocidade e torques e forças atuantes no corpo do robô, assim como, deslocamentos e velocidades angulares e torques nas rodas.

Essas grandezas são medidas a partir da definição de um sistema de referencia inercial cartesiano \mathcal{A} e de um outro referencial \mathcal{R} fixo a um ponto do corpo do robô. Um modelo mais simples é obtido se o referencial \mathcal{R} for fixado sobre o ponto de rotação pura do RMRD, ou seja, o ponto central sobre o eixo das rodas, conforme ilustrado na Figura 2.2.

A posição do robô é representada pelas coordenadas (x, y) referentes à origem do referencial \mathcal{R} medidas sobre o referencial inercial \mathcal{A} . A orientação é medida por meio do ângulo θ , descrito entre os eixos $x_{\mathcal{R}}$ e $x_{\mathcal{A}}$ no sentido anti-horário. O deslocamento angular da roda direita (ϕ_r) e da roda esquerda (ϕ_l), assim como as velocidades angulares $\dot{\phi}_r$ e $\dot{\phi}_l$ são medidas em torno do eixo $y_{\mathcal{R}}$, conforme é representado na Figura 2.2.

A posição e a orientação são representadas pelo vetor:

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

denominado de vetor de postura do robô. Um vetor de coordenadas generalizadas definido como q , composto pelas coordenadas de postura do RMRD e

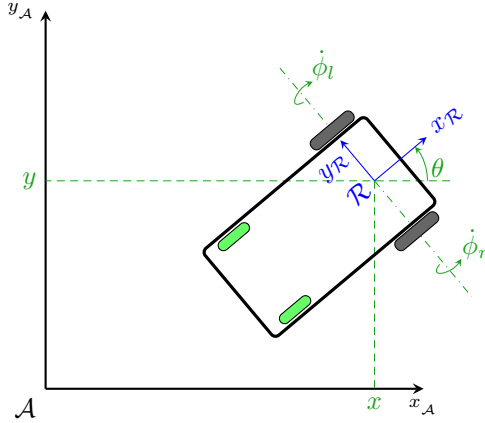


Figura 2.2 – Representação esquemática do RMRD e das variáveis de interesse.

de deslocamento angular das rodas, define a configuração do sistema:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi_r \\ \phi_l \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Consequentemente, têm-se os vetores de velocidades:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Por fim, o torque nas rodas é representado pelo seguinte vetor:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

O RMRD é sujeito a restrições de movimento devido ao fato de sua estrutura física não permitir velocidades na direção do eixo normal ao plano de suas rodas atuadas, restringindo-se a ter velocidade apenas na direção paralela ao eixo x_R . A descrição matemática dessas restrições é feita assumindo-se

que o contato entre as rodas e o chão se reduz a um ponto e que a velocidade desse contato é igual a zero. Como consequência, tem-se que não ocorre deslizamento e tampouco derrapagem das rodas, o que equivale a afirmar que:

- O módulo da velocidade linear de cada roda na direção do eixo x_R é igual ao módulo de suas respectivas velocidades tangenciais.
- As velocidades em qualquer outra direção são iguais a zero.

Essa situação é ilustrada na Figura 2.3 a partir da definição de um conjunto de dois vetores para cada roda: (i) o primeiro conjunto é referente às velocidades lineares das rodas cujas direções são paralelas ao eixo x_R e, assim, para a roda esquerda tem-se $v_{e_{x_R}} = v_{e_{tag}} = r\dot{\phi}_l$ e para a roda direita $v_{d_{x_R}} = v_{d_{tag}} = r\dot{\phi}_r$, em módulo; (ii) e o segundo conjunto é referente às velocidades na direção do eixo y_R , $v_{d_{y_R}} = v_{e_{y_R}} = 0$. Conclui-se que para cada roda, tem-se somente velocidade na direção x_R .

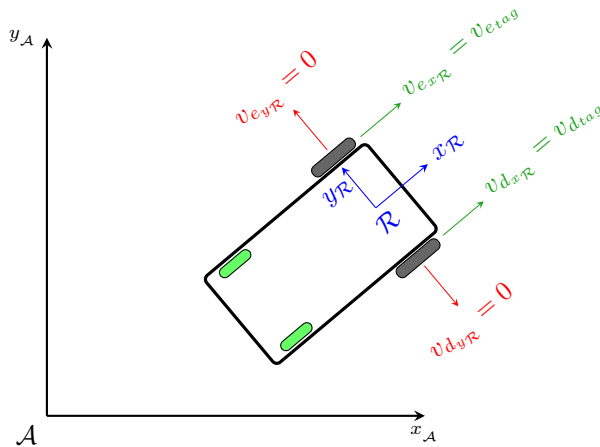


Figura 2.3 – Representação esquemática de um RMRD e suas restrições não holonômicas.

Na Figura 2.4 é mostrada uma imagem de perfil de uma roda com os vetores de velocidade para auxiliar na compreensão da situação descrita anteriormente.

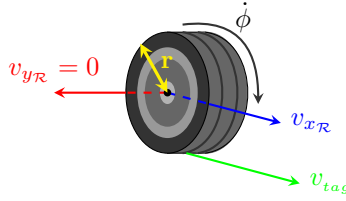


Figura 2.4 – Esquema de uma roda e suas respectivas restrições.

Como resultado desta análise as restrições não holonômicas do RMRD são definidas como:

$$\begin{aligned} v_{d_{x_{\mathcal{R}}}} &= r\dot{\phi}_r \\ v_{e_{x_{\mathcal{R}}}} &= r\dot{\phi}_l \\ v_{d_{y_{\mathcal{R}}}} &= v_{e_{y_{\mathcal{R}}}} = v_{y_{\mathcal{R}}} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

e devem ser reescritas em função das coordenadas generalizadas. Para tanto, é suficiente descrever as velocidades¹ $v_{d_{x_{\mathcal{R}}}}$, $v_{e_{x_{\mathcal{R}}}}$ e $v_{y_{\mathcal{R}}}$ em função de q .

As velocidades $v_{d_{x_{\mathcal{R}}}}$ e $v_{e_{x_{\mathcal{R}}}}$ são compostas pela soma das contribuições da velocidade na direção do eixo $x_{\mathcal{R}}$, a saber, $\dot{x}_{\mathcal{R}}$, e da velocidade tangencial, $b\dot{\theta}$, fruto da rotação em torno do centro de \mathcal{R} com velocidade $\dot{\theta}$. Por outro lado a velocidade $v_{y_{\mathcal{R}}}$ é composta apenas da contribuição da velocidade na direção do eixo $y_{\mathcal{R}}$, ou seja, $\dot{y}_{\mathcal{R}}$, conforme é mostrado na Figura 2.5 e expresso pelo conjunto de Equações (2.6).

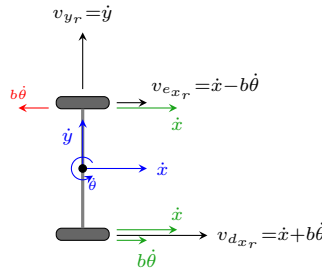


Figura 2.5 – Esquema de distribuição de velocidades em RMRD.

¹Para este desenvolvimento é utilizada uma notação para descrever em que sistema a medida é feita. Por exemplo x é medido em \mathcal{A} , logo é descrito como $^{\mathcal{A}}x$.

$$\begin{aligned}
v_{d_{x\mathcal{R}}} &= \dot{x}_{\mathcal{R}} + b\dot{\theta} \\
v_{e_{x\mathcal{R}}} &= \dot{x}_{\mathcal{R}} - b\dot{\theta} \\
v_{d_{y\mathcal{R}}} &= \dot{y}_{\mathcal{R}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

O próximo passo é expressar as velocidades $\dot{x}_{\mathcal{R}}$ e $\dot{y}_{\mathcal{R}}$ em termos das componentes do vetor de velocidade de postura ${}^{\mathcal{A}}\dot{x}$ e ${}^{\mathcal{A}}\dot{y}$, que são medidas no referencial \mathcal{A} . Para isso, considera-se a seguinte operação de rotação entre \mathcal{R} e \mathcal{A} :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{\mathcal{R}} \\ \dot{y}_{\mathcal{R}} \\ 0 \end{bmatrix} = {}^{\mathcal{R}}R_{\mathcal{A}}(\theta) {}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

em que:

$${}^{\mathcal{R}}R_{\mathcal{A}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

representa a matriz de rotação do referencial \mathcal{A} para o referencial \mathcal{R} . Assim, têm-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{\mathcal{R}} &= {}^{\mathcal{A}}\dot{x} \cos(\theta) + {}^{\mathcal{A}}\dot{y} \sin(\theta) \\
\dot{y}_{\mathcal{R}} &= {}^{\mathcal{A}}\dot{y} \cos(\theta) - {}^{\mathcal{A}}\dot{x} \sin(\theta).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Consequentemente, as restrições são obtidas relacionando-se as Equações (2.5), (2.6) e (2.9), como:

$$\begin{aligned}
-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) &= 0 \\
-\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) - b\dot{\theta} + r\dot{\phi}_r &= 0 \\
-\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) + b\dot{\theta} + r\dot{\phi}_l &= 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

em que é omitida a notação que identifica a medida das variáveis no referencial \mathcal{A} . Essas restrições podem ser reescritas em uma forma matricial conhecida como forma de Pfaffian:

$$A(\theta)\dot{q} = 0, \tag{2.11}$$

na qual:

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & -b & r & 0 \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & b & 0 & r \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Com a definição dos sistemas de coordenadas, é possível também determinar a localização do centro de inércia C_I do robô. Este é expressado no referencial \mathcal{A} por meio das coordenadas (x_I, y_I) . No referencial \mathcal{R} , o centro de inércia é expresso pela distância d e pelo ângulo α , veja Figura 2.6.

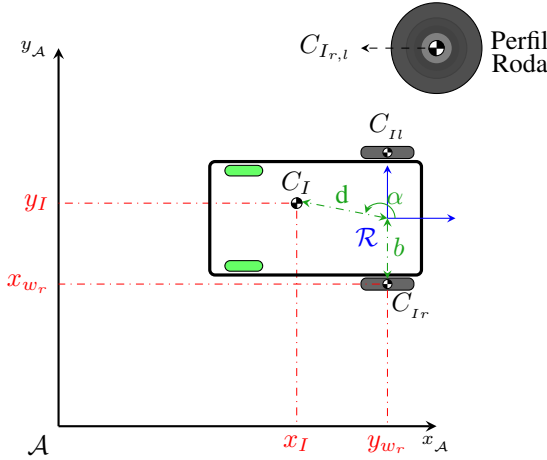


Figura 2.6 – Representação esquemática de um RMRD e seus centros de inércia.

Localizam-se, também, os centros de inércia das rodas direita C_{I_r} e esquerda C_{I_l} pelas coordenadas (x_{w_r}, y_{w_r}) e (x_{w_l}, y_{w_l}) expressas no referencial \mathcal{A} . No referencial \mathcal{R} , essas coordenadas podem ser expressas pela distância b medida entre a origem desse sistema e os centros de inércia das rodas, conforme mostrado na Figura 2.6.

Essas coordenadas de centro de inércia podem ser escritas na forma homogênea e expressas sobre o referencial \mathcal{R} como [48]:

$${}^{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \cos(\alpha) \\ d \sin(\alpha) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} x_{w_r} \\ y_{w_r} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} x_{w_l} \\ y_{w_l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Para expressar os pontos (2.13) no referencial \mathcal{A} basta aplicar a transformação homogênea por meio da matriz homogênea:

$${}^{\mathcal{A}}T_{\mathcal{R}} = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^{\mathcal{A}}R_{\mathcal{R}}(\theta) & {}^{\mathcal{A}}O_{\mathcal{R}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (2.14)$$

em que:

$${}^{\mathcal{A}}R_{\mathcal{R}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^{\mathcal{A}}O_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

representam, respectivamente, a matriz de rotação do referencial \mathcal{R} para \mathcal{A} e as coordenadas da origem de \mathcal{R} expressa em \mathcal{A} . Assim, obtêm-se:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x + d \cos(\theta + \alpha) \\ y + d \sin(\theta + \alpha) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ {}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x_{w_r} \\ y_{w_r} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x + b \sin(\theta) \\ y - b \cos(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ {}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x_{w_l} \\ y_{w_l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x - b \sin(\theta) \\ y + b \cos(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Derivando no tempo o conjunto de Equações (2.16), obtêm-se os seguintes vetores de velocidades:

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} - d\dot{\theta} \sin(\theta + \alpha) \\ \dot{y} + d\dot{\theta} \cos(\theta + \alpha) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ {}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \dot{x}_{w_r} \\ \dot{y}_{w_r} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} + b\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} + b\dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ {}^{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} \dot{x}_{w_l} \\ \dot{y}_{w_l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x} - b\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} - b\dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

os quais são necessários para a construção do modelo dinâmico.

O comando do robô é feito normalmente por motores DC Brush, que geram os torques que acionam as rodas do RMRD, como é o caso do Powerbot. Este tipo de motor possui uma redução por meio de um sistema de engrenagens que amplifica seu torque e diminui sua velocidade de saída. A tensão nos seus terminais de armadura u_a é definida como variável de entrada, ao passo que o torque mecânico τ é a variável de saída.

Além dessas variáveis, o comportamento desse dispositivo é influenciado pela corrente i_a , resistência R_a e indutância L_a que compõem seu circuito elétrico de armadura e, ainda, pela velocidade de saída $\dot{\phi}$. O torque τ e a

velocidade $\dot{\phi}$ se relacionam ao torque τ_M e à velocidade $\dot{\phi}_M$ antes do sistema de engrenagens, por meio de um redutor por engrenagens de relação n_w , que representa a redução gerada pelo sistema de engrenagens. Na Figura 2.7 é mostrada a configuração desse sistema.

O RMRD é comandado por dois motores, um para acionar a roda direita e outro a roda esquerda. Portanto, as variáveis de corrente e tensão dos motores direito e esquerdo são representadas, respectivamente, pelos vetores:

$$i_a = \begin{bmatrix} i_{a_r} \\ i_{a_l} \end{bmatrix}, \quad u_a = \begin{bmatrix} u_{a_r} \\ u_{a_l} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

O torque de saída τ é definido pelo vetor (2.4) e as velocidades de saída por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

em que nas equações (2.18) e (2.19) o subíndice r refere-se a direito e o subíndice l a esquerdo.

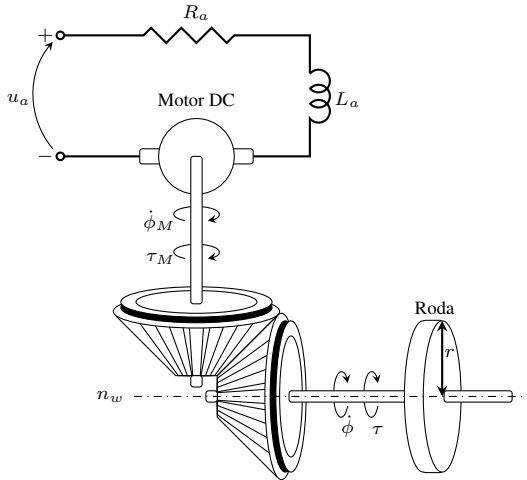


Figura 2.7 – Representação esquemática de um motor DC Brush.

Por conveniência os parâmetros utilizados para descrever o sistema são listados na Tabela 2.1.

A seguir, os comportamentos cinemáticos e dinâmicos são modelados para, então, determinar o modelo de configuração em espaço de estado adequado para a realização de simulações.

Tabela 2.1 – Parâmetros do RMRD.

| Parâmetro | Descrição |
|-------------|---|
| m | massa total do robô |
| m_r | massa da roda e rotor à qual está presa |
| m_c | massa do corpo do robô sem rodas e respectivos rotores ($m - 2m_r$) |
| I | inércia total do robô em relação ao sistema de coordenadas \mathcal{R} |
| I_c | inércia do corpo do robô em relação ao seu centro de massa |
| I_r | inércia das rodas em relação ao eixo normal ao plano do robô e que passa pelo centro de massa da roda |
| $I_{r\phi}$ | inércia das rodas em relação ao eixo de rotação do motor |
| c | comprimento do robô |
| $2b$ | largura do robô |
| h | altura do robô |
| d, α | coordenadas do centro de inércia medidas sobre o sistema de coordenadas \mathcal{R} |
| R_a | resistência de armadura do motor |
| L_a | indutância de armadura |
| k_b | constante de força contra eletromotriz |
| k_τ | constante de torque |
| n_w | redução dos motores |

2.2.2 Modelagem Cinemática

A cinemática tem como objetivo descrever o movimento de pontos, corpos e sistemas de corpos sem considerar sua causa. No caso da modelagem cinemática de um RMR não holonômico, tem-se que o sistema, com estado $q \in \mathbb{R}^n$, é sujeito a k restrições, divididas em l restrições holonômicas e $k - l$ não holonômicas, descritas na forma de Pfaffian [5]:

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (2.20)$$

em que $A(q)$ é uma matriz de dimensão $k \times n$ de posto completo. O objetivo é definir uma representação matemática dos movimentos permissíveis que atendem à (2.20). Para tanto, pode-se calcular um mapeamento entre o espaço que representa as velocidades permitidas ao robô, ou seja, o espaço nulo de $A(q)$, $\mathcal{N}(A(q))$, e o espaço definido pelo vetor \dot{q} .

Existe um campo vetorial, linearmente independente e continuamente diferenciável, $s_1(q), \dots, s_{n-k}(q)$ que pertence ao $\mathcal{N}(A(q))$, ou seja:

$$A(q)s_i(q) = 0, \quad i = 1, \dots, n - k, \quad (2.21)$$

e que forma uma base para esse espaço. Então, esse campo vetorial define uma distribuição:

$$\Delta = \text{span}\{s_1(q), \dots, s_{n-k}(q)\} \quad (2.22)$$

tal que $\dot{q} \in \Delta$ [2, 45, 46].

Portanto, existem: (i) uma matriz $S(q)$ cujas colunas são formadas pelos elementos do campo vetorial, isto é:

$$S(q) = [s_1(q) \ \dots \ s_{n-k}(q)], \quad (2.23)$$

que verifica $\dim(S(q)) = \dim(\Delta)$ e $A(q)S(q) = 0$; (ii) e um vetor:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \vdots \\ \Phi_{n-k}(t) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

pertencente à $\mathcal{N}(A(q))$ e que representa as velocidades permissíveis ao sistema, tais que para todo tempo t é válido o seguinte mapeamento:

$$\dot{q} = S(q)\Phi(t), \quad (2.25)$$

em que $S(q)$ é uma matriz Jacobiana que mapeia a variável Φ no espaço definido por \dot{q} [2, 45, 46]. Embora as escolhas de $S(q)$ e de Φ não sejam únicas, elas são dependentes uma da outra. Portanto, partindo-se de um vetor de velocidades Φ desejado e adequado é possível encontrar a matriz $S(q)$ associada.

O RMRD é representado pela coordenada generalizada $q \in \mathbb{R}^5$ como visto na Eq. (2.2) e opera no plano descrito pelo sistema de coordenadas \mathcal{A} , conforme mostrado na Figura 2.2. O robô pode atingir qualquer ponto desse plano por meio de trajetórias que respeitem suas restrições de movimentos (2.11), ou seja, trajetórias compostas pela combinação de seus deslocamentos longitudinais e rotacionais. O robô tem $k = 3$ restrições, que implica que $S(q)$ é definida como uma matriz $(5 \times 2) - [n \times (n - k)]$ - e o vetor $\Phi \in \mathbb{R}^2$. As velocidades angulares das rodas são a escolha mais natural para compor esse vetor, pois não possuem limitações, estão diretamente relacionadas aos atuadores e aos possíveis deslocamentos. Por consequência, define-se:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

conforme já havia sido feito em (2.19). A matriz $S(q)$ associada a essa escolha é dada por:

$$S(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta) & \frac{r}{2} \cos(\theta) \\ \frac{r}{2} \sin(\theta) & \frac{r}{2} \sin(\theta) \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

e verifica $A(q)S(q) = 0$. Portanto, o modelo cinemático de configuração para o RMRD é descrito por:

$$\dot{q} = S(q)\Phi \quad (2.28)$$

O modelo apresentado pela Equação (2.28) é denominado na literatura como modelo cinemático de configuração e é útil para a modelagem em que os atuadores são considerados, pois a escolha de Φ é exatamente a velocidade de saída dos motores DC (2.19).

A seguir são discutidas algumas propriedades relacionadas à distribuição Δ a título de complemento de informação [2, 45, 46].

Observação 2.1 *O estudo da involutividade da distribuição Δ pode ser utilizada para verificar a integrabilidade das restrições. Caso Δ for involutivo as restrições são holonômicas. Para o caso contrário existe Δ^* , definida como a menor distribuição involutiva que contém Δ , tal que $\dim(\Delta) \leq \dim(\Delta^*)$. Dentro desse contexto tem-se que caso $\dim(\Delta^*) = n$, então, todas as restrições são não holonômicas, ao passo que se $\dim(\Delta^*) = k - l$ implica que existem l restrições holonômicas e $m - l$ não holonômicas [2, 45, 46].*

Nos trabalhos de Sarkar, Yun e Kumar [45] e Coelho e Nunes [46], o estudo da distribuição formada pelas colunas de $S(q)$ (2.27) para o caso do RMRD, ou seja, $\Delta = \{s_1(q), s_2(q)\}$, mostra que duas das restrições desse robô são não holonômicas e uma é holonômica. Essas são, também, discriminadas na literatura como:

1. Restrição não holonômica de não derrapagem expressa pela primeira linha de (2.10):

$$\dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta) = 0. \quad (2.29)$$

2. Restrição não holonômica de não deslizamento expressa pela soma das duas últimas linhas de (2.10):

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) - \frac{r}{2}(\dot{\phi}_r + \dot{\phi}_l) = 0. \quad (2.30)$$

3. Restrição holonômica expressa pela integração do resultado da subtração entre as duas últimas linhas de (2.10):

$$\theta = \frac{r}{2b}(\Phi_r - \Phi_l) + c_1 \quad (2.31)$$

em que c_1 é uma constante de integração. Na sequência, estuda-se a modelagem dinâmica.

2.2.3 Modelagem Dinâmica

A modelagem dinâmica visa descrever a interação das forças e acelerações que agem sobre um sistema e geram movimento. No caso de um RMR, tem-se interesse em estudar as forças que geram os movimentos estudados na modelagem cinemática do sistema.

Para realizar a modelagem dinâmica do RMRD, opta-se, neste trabalho, pelo formalismo Euler-Lagrange associado ao princípio de d'Alembert, cuja formulação é baseada em energia e o produto é uma equação denominada equação de movimento. Esse formalismo permite o estudo das forças que atuam sobre o sistema, dentre as quais se tem, normalmente, forças conservativas, não conservativas e restritivas [5].

Forças de Coriolis, inerciais, gravitacionais e centrípetas são exemplos de forças conservativas generalizadas, ao passo que forças não conservativas generalizadas podem ser exemplificadas por forças externas geradas por atrito, perturbações e atuadores. As forças restritivas são provenientes das restrições físicas do sistema e, assim, evitam movimentos nas direções nas quais as restrições são violadas e podem ser descritas como:

$$\Gamma = A^T(q)\lambda \quad (2.32)$$

na qual $A(q) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ representa um conjunto de k restrições (2.20) e $\lambda \in \mathbb{R}^k$ é um vetor de magnitudes das forças restritivas. Seus elementos λ_i são conhecidos como multiplicadores de Lagrange. Para que estas forças possam ser consideradas no equacionamento, assume-se que não realizam trabalho e, portanto, conservam energia, conforme estabelece o princípio de d'Alembert [5].

A equação de movimento de Euler-Lagrange para sistemas conservativos é descrita como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.33)$$

sendo $q \in \mathbb{R}^n$ o vetor de coordenadas generalizadas e $L(q, \dot{q})$ denominado Lagrangeano e definido a partir da energia do sistema. O Lagrangeano é calculado como a diferença entre a energia cinética $K(q)$ e a energia potencial $U(q)$ do sistema [5, 49]:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (2.34)$$

em que a energia cinética pode ser escrita como:

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2.35)$$

sendo $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de inércia, cuja característica é ser simétrica, definida positiva e depender das massas e dos tensores de inércia do sistema

[5]. A energia potencial $V(q)$ em contrapartida não tem nenhuma forma específica.

O RMRD é um sistema não conservativo que sofre a ação de torques nas rodas, forças de atrito e outras forças externas, além de forças restritivas derivadas das suas limitações de movimentos. Assumindo-se que as restrições são linearmente independentes e que as forças restritivas não realizam trabalho sobre o sistema, adicionam-se à Equação (2.33) as contribuições das forças não conservativas, externas e restritivas para obter-se uma equação de movimento para um sistema não holonômico não conservativo como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + A^T(q)\lambda - \Upsilon = 0, \quad (2.36)$$

em que Υ representa as forças não conservativas e externas, e o termo $A^T(q)\lambda$, conforme já detalhado, representa as forças restritivas.

O cálculo do modelo dinâmico por meio de (2.36) necessita da definição do Lagrangeano do sistema. No caso de um RMR o Lagrangeano $L(q, \dot{q})$ depende apenas da energia cinética $K(q, \dot{q})$, pois sua energia potencial é igual a zero, devido ao robô estar no plano conforme descrito pela hipótese 5. Portanto, tem-se para o RMRD que:

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2.37)$$

Aplicando-se a formulação de Euler-Lagrange, apresentada em (2.36), considerando o Lagrangeano dado por (2.37) e, ainda, que Υ é formado pelos torques nas rodas dado pelo vetor τ , e um vetor τ_p que representa as perturbações e incertezas de parâmetros e modelo, tem-se:

$$M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T M(q) \dot{q}) + A^T(q)\lambda + \tau_p = B(q)\tau \quad (2.38)$$

que é reescrita como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + A^T(q)\lambda + \tau_p = B(q)\tau \quad (2.39)$$

na qual os termos $M(q)$ e $A^T(q)\lambda$ já foram descritos anteriormente. A matriz $C(q, \dot{q})$ refere-se às forças de Coriolis e centrífugas e é definida como:

$$C(q, \dot{q}) = \dot{M}(q)\dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T M(q) \dot{q}). \quad (2.40)$$

Já $B(q)$ é uma matriz de entrada que associa os torques nas rodas às outras forças que atuam no sistema e será determinada adiante.

O cálculo da energia cinética é feito considerando três corpos, o chassi do robô e suas duas rodas com os rotores. O valor total desta energia é a soma da energia cinética do chassi do robô, K_c , e das energias cinéticas das rodas direita e esquerda, K_{r_r} e K_{r_l} , respectivamente:

$$K = K_c + K_{r_r} + K_{r_l}. \quad (2.41)$$

A energia cinética do chassi do robô é calculada como:

$$K_c(v_c, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} v_c^T m v_c + \frac{1}{2} \dot{\theta} I \dot{\theta}, \quad (2.42)$$

sendo $\dot{\theta}$ a velocidade angular do centro de massa do robô e v_c a velocidade linear, que foi calculada anteriormente na Equação (2.17) em termos das coordenadas generalizadas, como:

$$v_c = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - d\dot{\theta} \sin(\theta + \alpha) \\ \dot{y} + d\dot{\theta} \cos(\theta + \alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

A energia cinética das rodas é calculada com:

$$K_{r_r}(v_{r_r}, \theta, \phi_r) = \frac{1}{2} v_{r_r}^T m_r v_{r_r} + \frac{1}{2} \dot{\theta} I_r \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\phi}_r I_{r\phi} \dot{\phi}_r, \quad (2.44)$$

$$K_{r_l}(v_{r_l}, \theta, \phi_l) = \frac{1}{2} v_{r_l}^T m_r v_{r_l} + \frac{1}{2} \dot{\theta} I_r \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\phi}_l I_{r\phi} \dot{\phi}_l,$$

sendo $\dot{\phi}_r$ e $\dot{\phi}_l$ as velocidades angulares das rodas, e v_{r_r} e v_{r_l} as velocidades lineares que foram determinadas na Equação (2.17):

$$v_{r_r} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{w_r} \\ \dot{y}_{w_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} + b\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} + b\dot{\theta} \sin(\theta) \end{bmatrix}; \quad (2.45)$$

$$v_{r_l} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{w_l} \\ \dot{y}_{w_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - b\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \dot{y} - b\dot{\theta} \sin(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

A energia cinética total pode então ser calculada assumindo a matriz de inércia que segue:

$$K(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\phi}_r, \dot{\phi}_l) = \frac{1}{2} \left[(2m_w + m_c)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I \dot{\theta}^2 + I_{r\phi} (\dot{\phi}_r^2 + \dot{\phi}_l^2) + 2\dot{\theta} (f_1 \dot{x} + f_2 \dot{y}) \right], \quad (2.47)$$

para qual se tem que:

$$\begin{aligned} I &= I_c + 2b^2m_w + d^2m_c + 2I_r \\ f_1(\theta) &= -dm_c \sin(\theta + \alpha) \\ f_2(\theta) &= dm_c \cos(\theta + \alpha) \end{aligned} \quad (2.48)$$

A energia cinética do RMRD (2.47) pode ser escrita na forma matricial (2.35) como:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m & 0 & f_1(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & m & f_2(\theta) & 0 & 0 \\ f_1(\theta) & f_2(\theta) & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

A matriz de Coriolis é calculada a partir da Equação (2.40) resultando em:

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -f_2(\theta)\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1(\theta)\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

A matriz de entrada deve relacionar os torques no motor com as coordenadas generalizadas. Como estes torques têm relação direta com as acelerações nas rodas, determina-se

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Para completar a equação de movimento é necessário o cálculo dos termos relacionados às forças restritivas $A^T(q)\lambda$. A matriz de restrições $A(\theta)$ foi definida anteriormente na Equação (2.12). O cálculo do vetor λ pode ser equacionado algebricamente conforme mostrado por Murray, Li e Sastry [5]. Entretanto, dependendo da complexidade do modelo, é inviável obter-se esse vetor.

Para evitar a necessidade de se calcular os multiplicadores de Lagrange, na Seção 2.2.5 é desenvolvido um modelo em espaço de estado sem restrições associando o modelo cinemático (2.28), o dinâmico (2.39) e o modelo do circuito elétrico dos motores por meio de manipulações algébricas, conforme desenvolvido no trabalho de Fierro e Lewis [16]. Na sequência, estuda-se a modelagem desse circuito para então obter-se a representação desejada.

2.2.4 Modelo do Circuito Elétrico

Os motores DC são comandados pelas tensões nos seus terminais gerando os torques nas rodas do RMRD. O comportamento elétrico desses elementos pode ser representado: (i) pela soma das quedas de tensões ao longo de seus circuitos de armadura, e (ii) pelos torques antes do sistema de engrenagens, que podem ser considerados proporcionais às correntes de armadura [25] (ver Figura 2.7). Portanto, tem-se que:

$$\begin{cases} u_{a_r} &= L_a \frac{d}{dt} i_{a_r} + R_a i_{a_r} + k_b \dot{\phi}_{m_r}, \\ \tau_{M_r} &= k_\tau i_{a_r}, \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} u_{a_l} &= L_a \frac{d}{dt} i_{a_l} + R_a i_{a_l} + k_b \dot{\phi}_{m_l}, \\ \tau_{M_l} &= k_\tau i_{a_l}. \end{cases} \quad (2.53)$$

As variáveis de velocidade e torque dos motores $\dot{\phi}_{m_r}$, $\dot{\phi}_{m_l}$, τ_{M_r} e τ_{M_l} são relacionadas às variáveis de velocidade e torque nas rodas por:

$$\begin{bmatrix} \tau_{M_r} \\ \tau_{M_l} \end{bmatrix} = n_w \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_{m_r} \\ \dot{\phi}_{m_l} \end{bmatrix} = \frac{1}{n_w} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

em que n_w representa a redução do acoplamento mecânico por engrenagens. Por fim, tem-se que o comportamento dos circuitos elétricos dos motores pode ser representado matematicamente por:

$$L_a \begin{bmatrix} \dot{i}_{a_r} \\ \dot{i}_{a_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{a_r} \\ u_{a_l} \end{bmatrix} - R_a \begin{bmatrix} i_{a_r} \\ i_{a_l} \end{bmatrix} - n_w k_b \begin{bmatrix} \dot{\phi}_d \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

sendo que os torques entregues pelos motores são dados por:

$$\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_e \end{bmatrix} = n_w k_\tau \begin{bmatrix} i_{a_r} \\ i_{a_l} \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

A representação de estado do RMRD é desenvolvida na seção seguinte.

2.2.5 Modelo de Configuração no Espaço de Estado

Nesta seção, é apresentado um desenvolvimento algébrico com os modelos do circuito elétrico, cinemático e dinâmico, vistos nas seções anteriores.

Pretende-se obter uma representação em espaço de estado em que as restrições não apareçam explicitamente e cujo objetivo é servir para a construção de um ambiente para simulações.

Considerando-se o modelo cinemático (2.28) e o modelo dinâmico (2.39), reescritos abaixo:

$$\dot{q} = S(\theta)\Phi, \quad (2.58)$$

$$M(\theta)\ddot{q} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{q} + A^T(\theta)\lambda + \tau_p = B(\theta)\tau, \quad (2.59)$$

e a propriedade

$$A(\theta)S(\theta) = S(\theta)^T A(\theta)^T = 0, \quad (2.60)$$

tem-se, ao pré-multiplicar (2.59) por $S(\theta)^T$ e aplicar (2.60), que:

$$S(\theta)^T M(\theta)\ddot{q} + S^T C(\theta, \dot{\theta})\dot{q} + S(\theta)^T \tau_p = S(\theta)^T B\tau \quad (2.61)$$

Diferenciando no tempo (2.58), obtém-se:

$$\ddot{q} = \dot{S}(\theta)\Phi + S(\theta)\dot{\Phi} \quad (2.62)$$

e manipulando-se algebricamente (2.58), (2.61) e (2.62), obtém-se:

$$\bar{M}\dot{\Phi} + \bar{C}(\dot{\theta})\Phi + \bar{\tau}_p = \bar{B}\tau \quad (2.63)$$

na qual se tem que:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= S(\theta)^T M(\theta) S(\theta) \\ \bar{C}(\dot{\theta}) &= S(\theta)^T M(\theta) \dot{S}(\theta, \dot{\theta}) + S(\theta)^T C(\theta, \dot{\theta}) S(\theta) \\ \bar{B} &= S(\theta)^T B \\ \bar{\tau}_p &= S(\theta)^T \tau_p, \end{aligned} \quad (2.64)$$

sendo que $\bar{M}(\theta)$ é uma matriz simétrica definida positiva [16]. Pode-se, ainda, reescrever (2.63) como:

$$\dot{\Phi} = \bar{M}^{-1} \left(\bar{B}\tau - \bar{\tau}_p - \bar{C}(\dot{\theta})\Phi \right) \quad (2.65)$$

em que:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \begin{bmatrix} f_3 & f_4 \\ f_4 & f_5 \end{bmatrix} \\ \bar{C}(\dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{d m_c r^2 \cos(\alpha)}{2b} \dot{\theta} \\ -\frac{d m_c r^2 \cos(\alpha)}{2b} \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 f_3 &= \frac{r^2 I + (b^2 m - 2 \operatorname{sen}(\alpha) b d m_c) r^2 + 4 b^2 I r_\phi}{4 b^2} \\
 f_4 &= -\frac{r^2 I - b^2 m r^2}{4 b^2} \\
 f_5 &= \frac{r^2 I + (2 \operatorname{sen}(\alpha) b d m_c + b^2 m) r^2 + 4 b^2 I r_{phi}}{4 b^2}.
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Portanto, associando as Equações (2.56) e (2.57) às Equações (2.58) e (2.65), obtém-se o seguinte modelo de configuração para a representação do comportamento do RMRD:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\Phi} \\ L_a \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\theta)\Phi \\ \bar{M}^{-1} \left(n k_\tau \bar{B} \dot{i}_a - \bar{\tau}_p - \bar{C}(\dot{\theta})\Phi \right) \\ u_a - R_a \dot{i}_a - n k_b \Phi \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

Desse modelo de estados, pode-se destacar:

1. Na primeira linha, tem-se a representação do comportamento cinemático do RMRD, em que a característica de subatuação pode ser evidenciada admitindo-se que $\Phi \in \mathbb{R}^2$ é a variável de controle utilizada para controlar o estado $q \in \mathbb{R}^5$, ou seja, tem-se um grau de liberdade maior que o grau de atuação².
2. O comportamento dinâmico, representado matematicamente na segunda linha, é totalmente atuado sob o ponto de vista de que $i_a \in \mathbb{R}^2$ é a variável de controle e $\Phi \in \mathbb{R}^2$ a variável controlada, isto é, os graus de liberdade e atuação são iguais.
3. O comportamento do circuito elétrico dos motores é totalmente atuado e está representado na terceira linha do modelo (2.68). Nesse caso, controla-se o vetor de correntes $i_a \in \mathbb{R}^2$ com o vetor de tensões $u_a \in \mathbb{R}^2$.
4. O termo $\bar{\tau}_p$ pode ser utilizado para representar incertezas paramétricas, estruturais e perturbações como, por exemplo, de carga e atrito.

O ambiente de simulação será construído pelo modelo (2.68), considerando-se ainda:

1. Valores máximos e mínimos para as tensões u_a , correntes i_a , torques e velocidades nas rodas, τ e Φ , que são provenientes das limitações físicas de operação dos motores do robô.

²Um sistema é dito subatuado se tem maior grau de liberdade do que grau de atuação.

2. Limites de taxas de amostragem distintas para as malhas de controle interna e externa referentes às restrições físicas dos dispositivos digitais e de implementação computacional.
3. A medida dos parâmetros é sujeita a incertezas e, portanto, os parâmetros são conhecidos dentro de uma faixa de valores.

Na sequência, é apresentado o modelo de postura para o RMRD, que será utilizado para a construção dos controladores.

2.3 Modelo de Postura

Nesta seção, é apresentada uma modelagem do RMRD cujo propósito é servir de modelo base para a síntese de controladores. Inicialmente, são apresentadas a descrição e as suposições consideradas para a construção desse modelo.

2.3.1 Descrição e Suposições

O modelo de postura, como será visto a seguir, é simplificado quando comparado ao modelo de configuração, uma vez que utiliza menos variáveis e agrega menos detalhes do funcionamento do robô. Contudo é adequado à síntese de controle robusto de rastreamento de trajetórias, pois oferece informações suficientes para essa tarefa e, principalmente, tem-se que as trajetórias, normalmente, são dadas em coordenadas de postura. Além disso, a menor complexidade desse modelo facilita o desenvolvimento de controladores. Para a modelagem postural do RMRD, consideram-se algumas suposições já assumidas para o modelo de configuração, a saber:

1. O contato de cada roda com o chão se reduz a um ponto cuja velocidade é zero. Portanto, não ocorre deslizamento e tampouco derrapagem das rodas.
2. As rodas livres são desconsideradas da modelagem por não influenciarem na cinemática, diferente das rodas simples atuadas cujo raio é representado³ por r_{nom} .
3. O robô opera em ambiente plano com piso regular.

Entretanto, para obter um modelo mais simples, supõe-se que:

³O subíndice *nom* é utilizado para distinguir parâmetros nominais.

1. O RMRD é formado de um corpo único cujo formato é de um prisma retangular com comprimento c_{nom} , largura $2b_{nom}$ e altura h_{nom} . Além disso, a coordenada do seu centro de massa coincide com o centro geométrico do robô.
2. A dinâmica dos atuadores, o comportamento de sensores e outros equipamentos eletrônicos são desconsiderados, partindo do pressuposto que o tempo de resposta destas dinâmicas é muito menor do que o da dinâmica do sistema principal.
3. Apenas perturbações externas de cargas são consideradas e o sistema é suposto bem conhecido, sem incertezas paramétricas e estruturais.

Conforme feito anteriormente, adota-se uma representação do sistema utilizando-se os sistemas de coordenadas \mathcal{A} e \mathcal{R} . Entretanto, apenas as coordenadas de postura do robô

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

são consideradas e como variáveis de entrada permanecem os torques nas rodas. Na Figura 2.8 é mostrada a representação do RMRD no espaço cartesiano, em que se localiza seu centro de inércia C_I , que coincide com o centro geométrico do robô, medido sobre o eixo $x_{\mathcal{R}}$ pela distância d_{nom} .

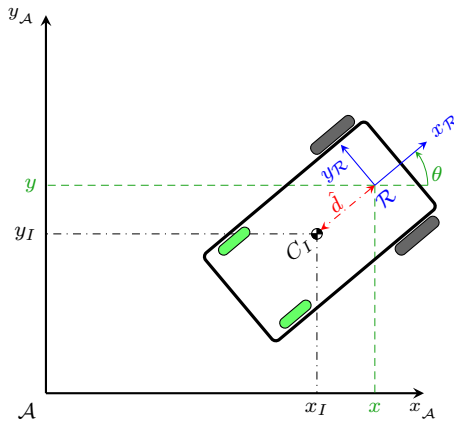


Figura 2.8 – Representação planar do RMRD.

Adota-se a mesma representação anterior para o torque nas rodas, ou seja:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

As velocidades de postura do robô são definidas como as derivadas temporais das coordenadas de postura:

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

e estão sujeitas às mesmas restrições de movimentos expressa na Eq. (2.10), que foram calculadas na Seção 2.2.1. A construção do modelo cinemático de postura é influenciada apenas pela primeira equação de restrição, que é reescrita a seguir:

$$-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) = 0 \quad (2.72)$$

que pode ser escrita na forma de Pfaffian como⁴:

$$A_{pos}(\theta) \dot{\xi} = 0 \quad (2.73)$$

na qual:

$$A_{pos}(\theta) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Há a necessidade de se definir relações entre as variáveis relacionadas às velocidades, acelerações e torques nas rodas e no centro de inércia do robô. Para isso, note que nas duas últimas equações do conjunto de restrições (2.10):

$$\begin{aligned} -\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) - b\dot{\theta} + r\dot{\phi}_r &= 0 \\ -\dot{x} \cos(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) + b\dot{\theta} + r\dot{\phi}_l &= 0, \end{aligned} \quad (2.75)$$

o termo $\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta)$ refere-se à velocidade na direção de $x_{\mathcal{R}}$, e é denominado de velocidade linear do robô cuja representação é dada pela variável v . Além disso, tem-se que $\dot{\theta}$ é a velocidade rotacional, ou angular, do RMRD e é denominada por w . Com essas definições pode-se reescrever (2.75) como:

$$v + bw - r\dot{\phi}_r = 0 \quad (2.76)$$

$$v - bw - r\dot{\phi}_l = 0 \quad (2.77)$$

⁴O subíndice *pos* é utilizado para diferenciar variáveis e matrizes que pertencem ao modelo de postura.

Manipulando-se as Equações (2.76) e (2.77), obtém-se uma relação entre as velocidades do RMRD e as velocidades rotacionais de suas rodas:

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = T_v \begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

em que T_v , matriz de transformação de velocidade, é dada por:

$$T_v = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

De forma análoga, pode-se obter uma relação entre as acelerações nas rodas (2.70) e no centro de massa do robô C_I . Para tanto, considera-se a derivada temporal de (2.75):

$$\begin{aligned} -\ddot{x} \cos(\theta) - \ddot{y} \sin(\theta) - \dot{\theta}(-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta)) - b\ddot{\theta} + r\ddot{\phi}_r &= 0 \\ -\ddot{x} \cos(\theta) - \ddot{y} \sin(\theta) - \dot{\theta}(-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta)) + b\ddot{\theta} + r\ddot{\phi}_l &= 0 \end{aligned}$$

em que o termo $(-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta))$ é igual a zero devido a restrição (2.72). O termo $(\ddot{x} \cos(\theta) - \ddot{y} \sin(\theta))$ representa a aceleração linear do RMRD, \dot{v} , ou seja, a aceleração na direção de $x_{\mathcal{R}}$ e $\dot{\theta}$ equivale à aceleração angular \dot{w} e, portanto, pode-se escrever:

$$\dot{v} + b\dot{w} - r\ddot{\phi}_r = 0 \quad (2.80)$$

$$\dot{v} - b\dot{w} - r\ddot{\phi}_l = 0 \quad (2.81)$$

Assim, a partir das Equações (2.80) e (2.81), chega-se a:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = T_v \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_r \\ \ddot{\phi}_l \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

em que T_v foi definida em (2.79). Como consequência, essa mesma matriz T_v define a relação entre os torques generalizados relacionados a \dot{v} e \dot{w} e os torques nas rodas relacionados a $\ddot{\phi}_r$ e $\ddot{\phi}_l$.

As coordenadas e velocidades do centro de inércia C_I podem ser obtidas substituindo-se $\alpha = 0$ e $d = d_{nom}$ nas Equações (2.16) e (2.17):

$${}^A \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_{nom} \cos(\theta) \\ y + d_{nom} \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.83)$$

$${}^A \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - d_{nom} \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y} + d_{nom} \dot{\theta} \cos(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Os parâmetros do RMRD utilizados ao longo dessa seção são listados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Parâmetros nominais do RMRD.

| Parâmetro | Descrição |
|------------|---|
| m_{nom} | massa total do robô |
| I_{nom} | Inércia total do robô em relação ao sistema de coordenadas \mathcal{R} |
| c_{nom} | comprimento do robô |
| $2b_{nom}$ | largura do robô |
| h_{nom} | altura do robô |
| d_{nom} | Coordenadas do centro de inércia expressas sobre o sistema de coordenadas \mathcal{R} |

Na sequência, os modelos cinemático e dinâmico de postura são obtidos para, então, se descrever o modelo de postura em espaço de estado.

2.3.2 Modelagem Cinemática

O modelo cinemático de postura é obtido aplicando-se a metodologia apresentada na Seção 2.2.2 e é descrito pelas coordenadas posturais do robô $\xi \in \mathbb{R}^3$ sujeitas à restrição (2.73). Conclui-se que é necessário definir uma matriz $S_{pos}(\xi)$ composta de dois vetores coluna de dimensão 3, pois foi definido que a matriz Jacobiana $S(q)$ deve ter dimensão $n \times (n - k)$, em que $n = 3$ é a dimensão do sistema e $k = 1$ é o número de restrições (ver Equação (2.73)).

Escolhendo-se o vetor de velocidades:

$$\eta = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

em que v é a velocidade linear e w a velocidade angular do robô, para a construção da representação matemática desejada, tem-se:

$$S_{pos}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

que verifica a propriedade de que $A_{pos}(\xi)S_{pos}(\xi) = 0$.

Logo, o modelo cinemático é descrito por:

$$\dot{\xi} = S_{pos}(\xi)\eta \quad (2.87)$$

2.3.3 Modelagem Dinâmica

Adotando-se novamente a abordagem pelo formalismo de Euler-Lagrange, a equação de movimento para o caso tratado possui a mesma estrutura da Equação (2.36) e é escrita como:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{pos}}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L_{pos}}{\partial \xi} + A_{pos}^T(\xi)\lambda - \Upsilon = 0, \quad (2.88)$$

na qual Υ deve representar os torques de entrada τ e a perturbação externa de carga τ_p . O termo $A_{pos}^T(\xi)\lambda$ representa as forças restritivas.

O Lagrangeano depende apenas da energia cinética $K(\xi, \dot{\xi})$, conforme já discutido, e é expresso como:

$$L_{pos}(\xi, \dot{\xi}) = K_{pos}(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T M_{pos}(\xi) \dot{\xi} \quad (2.89)$$

em que $M_{pos}(\xi)$ é a matriz de inércia.

A equação de movimento (2.88) pode, então, ser desenvolvida utilizando (2.89) e obtendo-se:

$$M_{pos}(\xi)\ddot{\xi} + C_{pos}(\xi, \dot{\xi})\dot{\xi} + A_{pos}^T(\xi)\lambda + \tau_p = B_{pos}(\xi)\tau, \quad (2.90)$$

em que os termos $M_{pos}(\xi)$ e $A_{pos}^T(\xi)\lambda$ já foram definidos anteriormente. A matriz $C_{pos}(\xi, \dot{\xi})$ refere-se às forças de Coriolis e centrífugas e é definida como:

$$C_{pos}(\xi, \dot{\xi}) = \dot{M}_{pos}(\xi)\dot{\xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\dot{\xi}^T M_{pos}(\xi) \dot{\xi} \right) \quad (2.91)$$

e $B_{pos}(\xi)$ é denominada de matriz de entrada.

A energia cinética do RMRD é calculada como:

$$K_{pos}(v_{c_{pos}}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} v_{c_{pos}}^T m_{nom} v_{c_{pos}} + \frac{1}{2} \dot{\theta} I_{nom} \dot{\theta} \quad (2.92)$$

em que $\dot{\theta}$ é a velocidade angular do centro de massa do robô e $v_{c_{pos}}$ a velocidade linear, que foi definida em (2.84) e é reescrita a seguir:

$$v_{c_{pos}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - d_{nom} \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{y} + d_{nom} \dot{\theta} \cos(\theta) \end{bmatrix}; \quad (2.93)$$

Logo, a energia cinética é calculada como:

$$K_{pos}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left[m_{nom}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I_{nom} \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\theta} (h_1(\theta) \dot{x} + h_2(\theta) \dot{y}) \right] \quad (2.94)$$

em que:

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= -d_{nom} m_{nom} \sin(\theta) \\ h_2(\theta) &= d_{nom} m_{nom} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.95)$$

A energia cinética do RMRD (2.94) pode ser escrita na forma matricial (2.89), assumindo a seguinte matriz de inércia:

$$M_{pos}(\theta) = \begin{bmatrix} m_{nom} & 0 & h_1(\theta) \\ 0 & m_{nom} & h_2(\theta) \\ h_1(\theta) & h_2(\theta) & I_{nom} \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

A matriz de Coriolis, por sua vez, é calculada a partir da Equação (2.91) resultando em:

$$C_{pos}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_2(\theta) \\ 0 & 0 & h_1(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Já a matriz de entrada deve relacionar os torques nas rodas com as acelerações das coordenadas de postura e, portanto, a matriz $B_{pos}(q)$ deve ser igual à matriz T_v (2.79), ou seja:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

2.3.4 Modelo de Postura em Espaço de Estado

Utilizando a metodologia apresentada na Seção 2.2.5, pode-se obter um modelo dinâmico sem restrições em função do vetor de velocidade η , como:

$$\bar{M}_{pos} \dot{\eta} + \bar{C}_{pos}(\dot{\theta}) \eta + \bar{\tau}_p = \bar{B}_{pos} \tau \quad (2.99)$$

em que:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{pos} &= S_{pos}(\theta)^T M_{pos}(\theta) S_{pos}(\theta) \\ \bar{C}_{pos}(\dot{\theta}) &= \dot{S}_{pos}^T(\theta) M_{pos}(\theta) S_{pos}(\dot{\theta}) + S_{pos}(\theta)^T C_{pos}(\theta) S_{pos}(\theta) \\ \bar{B}_{pos} &= S_{pos}(\theta)^T B_{pos} \end{aligned} \quad (2.100)$$

sendo \bar{M}_{pos} uma matriz simétrica positiva definida [16] e $\bar{\tau}_p$ um vetor que representa as incertezas e perturbações. Esse modelo pode ser reescrito como:

$$\dot{\eta} = \bar{M}_{pos}^{-1} \left(\bar{B}_{pos}(\tau) - \bar{\tau}_p - \bar{C}_{pos}(\dot{\theta})\eta \right) \quad (2.101)$$

em que:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{pos} &= \begin{bmatrix} m_{nom} & 0 \\ 0 & I_{nom} \end{bmatrix} \\ \bar{C}_{pos}(\dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} 0 & -d_{nom} m_{nom} \dot{\theta} \\ d_{nom} m_{nom} \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{B}_{pos} &= \begin{bmatrix} \frac{r_{nom}}{2} & \frac{r_{nom}}{2} \\ \frac{r_{nom}}{2b_{nom}} & -\frac{r_{nom}}{2b_{nom}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Associando as Equações (2.87) e (2.101) obtém-se o seguinte modelo de postura em espaço de estado para a representação do comportamento do RMRD:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pos}(\theta) \eta \\ \bar{M}_{pos}^{-1} \left(\bar{B}_{pos} \tau - \bar{\tau}_p - \bar{C}_{pos}(\dot{\theta})\eta \right) \end{bmatrix}. \quad (2.103)$$

Considerações sobre o modelo representado por (2.103):

1. A subatuação é evidente no modelo cinemático (primeira linha da Equação (2.68)), pois se tem que $\eta \in \mathbb{R}^2$ é a variável que deve ser utilizada para controlar a postura do robô $\xi \in \mathbb{R}^3$. Dessa maneira, o grau de liberdade é maior que o grau de atuação.
2. Em contrapartida, o modelo dinâmico, representado na segunda linha, é totalmente atuado, pois se tem como variável de estado o vetor de velocidades $\eta \in \mathbb{R}^2$ a ser controlado pelas entradas em torque $\tau \in \mathbb{R}^2$, isto é, um torque aplicado a cada uma das rodas atuadas.

2.4 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo, foram descritas a obtenção de um modelo de configuração e de um modelo de postura em espaço de estado para um RMRD. A necessidade de se construir um ambiente de simulação que represente bem os aspectos reais do comportamento do robô como limitações de

atuação, incertezas e perturbações motivaram a construção do modelo de configuração. O modelo de postura, em contrapartida, foi construído para servir de base para a síntese de controle, que tem por objetivo o rastreamento de trajetórias descritas pelas coordenadas de postura do robô.

Capítulo 3

Fundamentação Preliminar de Controle

Sumário

| | | |
|------------|---|-----------|
| 3.1 | Controle de Dinâmica Inversa | 41 |
| 3.2 | Controle por Modo Deslizante | 43 |
| 3.2.1 | Síntese de Superfícies deslizantes | 47 |
| 3.2.2 | Princípio de Invariância | 49 |
| 3.2.3 | Controle por Modo Deslizante de Primeira Ordem | 50 |
| 3.2.4 | Controle por Modo Deslizante de Primeira Or- dem com Camada Limite | 51 |
| 3.2.5 | Controle por Modo Deslizante de Segunda Ordem | 52 |
| 3.3 | Conclusão | 57 |

Este capítulo é dedicado à fundamentação teórica das técnicas de controle que são utilizadas nos capítulos seguintes na composição e validação da solução de controle proposta. Trata-se da técnica de controle de dinâmica inversa e de técnicas de controle por modo deslizante (CMD), dentre as quais são apresentadas a técnica de controle por modo deslizante de primeira ordem (CMD1), controle por modo deslizante de primeira ordem com camada limite e controle por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting*.

3.1 Controle de Dinâmica Inversa

Nesta seção, é discutida a técnica de controle de dinâmica inversa. Esta técnica é um tipo de controle linearizante que foi formulado para o con-

trole de robôs manipuladores com elos rígidos. Basicamente, o objetivo é compensar as forças atuantes no sistema por meio de um sinal de controle linearizante. Como produto da aplicação dessa técnica, tem-se um sistema linear no qual se podem aplicar técnicas de controle linear. Por exemplo, no trabalho de Spong, Hutchinson e Vidyasagar [49] é mostrado um controle de dinâmica inversa com PD para garantir o rastreamento de trajetória para robôs manipuladores.

Considerando-se o caso de um robô manipulador com n elos, cuja representação matemática é dada pela seguinte equação de movimento:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = u, \quad (3.1)$$

sendo $q \in \mathbb{R}^n$ o vetor de coordenadas generalizadas, $u \in \mathbb{R}^n$ os torques de entrada, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de inércia, $C(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de Coriolis e $G(q) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de forças gravitacionais. O controle de dinâmica inversa consiste em sintetizar uma lei de controle de realimentação:

$$u = f(q, \dot{q}, t), \quad (3.2)$$

que compense as não linearidades do sistema (3.1) e que atenda a algum objetivo de controle como, por exemplo, o rastreamento de trajetória [49]. Para tanto, considera-se a seguinte lei de controle:

$$u = M(q)a_q + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q), \quad (3.3)$$

que, ao ser aplicado ao sistema (3.1), resulta em:

$$\ddot{q} = a_q. \quad (3.4)$$

A dinâmica (3.4) pode então ser tratada por meio de técnicas de controle linear para atingir os objetivos desejados. Por exemplo, o termo a_q , que representa uma nova entrada de controle, pode ser sintetizado para garantir o rastreamento de trajetória empregando um controle PD:

$$a_q = \ddot{q}^d(t) - K_0\tilde{q} - K_1\dot{\tilde{q}}, \quad (3.5)$$

em que $\tilde{q} = q - q^d$, $\dot{\tilde{q}} = \dot{q} - \dot{q}^d$, K_0 e K_1 são matrizes definidas positivas e, em geral, escolhidas como matrizes diagonais para facilitar o projeto. Os elementos dessas matrizes representam os ganhos de posição e velocidade, respectivamente. As trajetórias desejadas de posição, velocidade e aceleração são dependentes do tempo e são representadas, respectivamente, por $q^d(t)$, $\dot{q}^d(t)$ e $\ddot{q}^d(t)$.

Substituindo (3.5) em (3.4), obtém-se o seguinte sistema em malha fechada:

$$\ddot{\tilde{q}} + K_1\dot{\tilde{q}} + K_0\tilde{q} = 0, \quad (3.6)$$

em que o ajuste das matrizes de ganho K_1 e K_0 deve garantir o objetivo de controle.

No próximo capítulo essa técnica será adequada para a síntese de controle dinâmico para o RMRD. Na sequência, as técnicas de controle por modo deslizante serão estudadas.

3.2 Controle por Modo Deslizante

Dado um sistema não linear e afim no controle, escrito como:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + h(x, t), \quad (3.7)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ o vetor de variáveis de controle, $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são campos vetoriais e, ainda, $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa perturbações e incertezas alcançáveis pelo controle, ou seja, que podem ser expressas como $h(x, t) = g(x)\gamma(x, t)$. Um CMD ideal garante que forçando o sistema (3.7) a se comportar sob um conjunto de m restrições definidas em termos das suas variáveis de estado (por exemplo $x_1 + x_2 = 0$), a dinâmica restringida, denominada de dinâmica de modos deslizantes e escrita como:

$$\dot{x}_{md} = f_{md}(x_{md}) \quad (3.8)$$

terá dimensão reduzida igual a $n - m$ e, consequentemente, $x_{md} \in \mathbb{R}^{n-m}$ and $f_{md}(x_{md}) : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$. Além disso, essa dinâmica será estável, invariante a $h(x, t)$ e terá bom desempenho [39]. A definição das restrições é normalmente feita por meio de uma superfície

$$\sigma(x) = 0 \quad (3.9)$$

ou uma variedade $\mathcal{M}(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma(x) = 0\}$ com $\sigma(x) \in \mathbb{R}^m$ e tem como objetivo uma dinâmica de modo deslizante estável e que atenda a objetivos e requisitos de desempenho de controle, como regulação, rastreamento de trajetória, tempo de resposta, entre outros. Já a lei de controle u atende a seguinte estrutura:

$$u_i = \begin{cases} \psi_i^+(x) & \text{se } \sigma_i(x) > 0 \\ \psi_i^-(x) & \text{se } \sigma_i(x) < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

em que $i = 1, 2, \dots, m$ e deve ser projetada de tal forma a garantir que as trajetórias das variáveis de estado do sistema (3.7) atendam as restrições (3.9) em tempo finito. Dessa maneira, o sistema é forçado ao modo deslizante,

rejeitando o termo de perturbações e incertezas $h(x)$ [39, 50, 51]. A invariância e redução de dimensão oferecidas pela técnica CMD são propriedades importantes e de interesse para o desenvolvimento de um controle robusto.

Normalmente, no caso multivariável, em que $u \in \mathbb{R}^m$, as restrições são definidas na forma vetorial:

$$\sigma(x) = \begin{bmatrix} \sigma_1(x) \\ \sigma_2(x) \\ \vdots \\ \sigma_m(x) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.11)$$

Na literatura, sugere-se que esse caso seja tratado por meio do desacoplamento do sistema em subsistemas por permitir uma síntese de controle sistemática [39, 50, 51]. Embora, não desacoplar o sistema implique no tratamento individual de cada caso, pode-se tomar proveito do acoplamento do sistema para se obter um bom resultado. Dá-se sequência ao estudo de fundamentação teórica da técnica de CMD e, sem perda de generalidade, considera-se apenas o caso escalar representado pelo sistema:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.12)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ uma entrada de controle escalar e $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são campos vetoriais. O termo $h(x)$ é desconsiderado por hora, mas será retomado no estudo do princípio de invariância.

Antes de discutir a síntese de controladores por modo deslizante e suas principais características, considere as definições a seguir:

Definição 3.1 Denomina-se $\sigma(x) \in \mathbb{R}$ de variável de chaveamento¹, ao passo que $\sigma(x) = 0$ é definida como superfície deslizante ou de deslizamento, cuja função é representar restrições. Estas ainda podem ser escritas por meio de uma variedade $\mathcal{M}(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma(x) = 0\}$.

Definição 3.2 O número de vezes que é necessário derivar $\sigma(x)$ no tempo para que a variável de controle u apareça explicitamente define o conceito de ordem de modo deslizante [44, 52]. Portanto, se é necessário derivar $\sigma(x)$ r vezes no tempo para que u apareça explicitamente, então se tem um modo deslizante de ordem r .

Definição 3.3 Diz-se que o sistema está em modo deslizante de ordem r se a condição $\sigma(x) = \dot{\sigma}(x) = \dots = \sigma^{(r-1)}(x) = 0 \forall x$ é atendida e que, também,

¹Esta convenção para $\sigma(x)$ é estabelecida neste trabalho para facilitar a compreensão.

pode ser escrita por meio da variedade $\mathcal{M}(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma(x) = \dot{\sigma}(x) = \dots = \sigma(x)^{(r-1)} = 0\}$ [44, 52].

Uma forma de determinar uma superfície $\sigma(x) = 0$ é utilizar um processo iterativo em que se faz uma primeira escolha de superfície baseada no conhecimento que se tem do sistema e nos objetivos de controle. Em seguida, determina-se a dinâmica de modo deslizante referente a essa escolha, verifica-se se atende aos requisitos e, caso não seja adequada, deve-se buscar uma nova superfície candidata e repetir o processo. Uma maneira prática para o cálculo dessa dinâmica é por meio do método de controle equivalente [39], que será detalhado na Seção 3.2.1.

A forma padrão de um CMD [52], consiste no controle por modo deslizante de primeira ordem (CMD1). Esse é aplicável aos casos em que se tem uma superfície com grau relativo um (ver Definição 3.2). A lei de controle u é definida como uma função descontínua do sinal da variável de chaveamento $\sigma(x)$, de tal forma que o sinal de controle é chaveado.

Em um caso ideal, em que não se têm dinâmicas negligenciadas e pode-se chavear o controle com frequência infinita, a aplicação de um CMD1, mediante uma escolha adequada de uma superfície deslizante, garante ao sistema invariância a perturbações e incertezas alcançáveis pelo controle, representadas por $h(x)$ em (3.7) [39].

Contudo, em uma implementação prática, é comum que dinâmicas rápidas sejam negligenciadas nos modelos utilizados para a síntese de controle, como é o caso das dinâmicas dos atuadores e dos sensores. Além disso, há limitação física dos dispositivos que restringem a frequência máxima de chaveamento do sinal de controle. Ambos os fatores descritos são as principais causas do fenômeno conhecido como *chattering*. Este consiste de oscilações de amplitude e frequência limitadas, que se propagam pelas variáveis de estado do sistema, diminuindo a exatidão de controle, causando desgastes de partes mecânicas móveis e ineficiência em termos de energias [40].

A capacidade de chavear em alta frequência é um requisito que deve ser atendido pelo sistema, porém sempre existirá um limite. Por outro lado, ao se chavear em alta frequência, dinâmicas não modeladas podem ser excitadas gerando *chattering*. Trabalhos em que se analisaram os efeitos desse fenômeno, devido à excitação de dinâmicas negligenciadas de primeira e segunda ordem, revelam que as oscilações de *chattering* têm relação com o módulo do ganho de controle chaveado e com a constante de tempo dessas dinâmicas [39, 40, 43, 53, 54]. Essas constatações têm norteado a busca de soluções para reduzir efeitos do *chattering* sem ter que se modelar todo o sistema.

Dentre as soluções propostas, podem-se destacar a técnica de ganho variável, a técnica baseada em observador e a técnica de camada limite [39, 40]. A primeira mantém o chaveamento em alta frequência e utiliza um ga-

nho dependente dos estados do sistema, enquanto a segunda faz uso de um observador baseado em CMD1 para garantir a estabilidade. A técnica de camada limite, que é uma das soluções mais difundidas, consiste em gerar leis de controle contínuas que forcem as trajetórias do sistema para uma camada em torno da superfície de deslizamento. Essas técnicas, apesar de proporcionarem redução de *chattering*, podem diminuir a robustez consideravelmente [39, 40].

Uma aplicação de controle por modo deslizante de segunda ordem (CMD2) pode ser empregada como alternativa a essas soluções, proporcionando melhor robustez. Essa aplicação consiste em se tomar a derivada temporal da entrada do sistema (3.12), \dot{u} , como entrada de controle, em relação a qual se tem um modo deslizante de segunda ordem, conforme a Definição 3.2. Dessa forma, o controle u é contínuo, e sua derivada é descontínua e limitada. Isso permite que se possa usar CMD2 para mitigar os efeitos de *chattering*. Além disso, quanto maior for o grau do modo deslizante maior é a exatidão na convergência de $\sigma(x)$ para zero, em relação à limitação da frequência de chaveamento, conforme foi demonstrado por Levant [44]. Portanto, é atribuída às técnicas de CMD2 a propriedade de redução de *chattering* com melhor robustez quando comparadas às técnicas de CMD1 [42–44, 52, 54].

Dentre as técnicas de CMD2 que são utilizadas na redução de *chattering*, podem ser listados os algoritmos de *twisting*, *Drift* e com lei de variação prescrita, cujo interesse de aplicação neste trabalho é pequeno devido suas sínteses dependerem da derivada temporal da variável de chaveamento, $\dot{\sigma}(x)$ [44, 52, 55]. O desenvolvimento analítico dessa derivada pode ser complexo ou impraticável e seu cálculo numérico é sujeito a uma inexatidão indesejada.

Outra forma de implementação de um CMD2 proposta por Bartolini, Ferrara e Usai [42] é o algoritmo subótimo, seu desempenho depende da detecção de máximos, mínimos e pontos de inflexão das trajetórias da variável de chaveamento. A concepção desse algoritmo limita sua aplicação a sistemas desacoplados e, portanto, o tratamento de sistemas subatuados é restrita a possibilidade de desacoplá-lo [41]. Por fim, tem-se o algoritmo *super-twisting* dependente apenas de $\sigma(x)$ e cujas condições de convergência não impedem sua aplicação direta a sistemas subatuados.

Na Seção 3.2.1, é apresentado um procedimento para a síntese de uma superfície deslizante, cujo ferramental é utilizado na Seção 3.2.2 para mostrar a propriedade de invariância de um CMD. O controle por modo deslizante de primeira ordem é apresentado na Seção 3.2.3 e, na sequência, o CMD1 com camada limite é descrito na Seção 3.2.4. Por fim, apresenta-se a descrição do controle por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting*.

3.2.1 Síntese de Superfícies Deslizantes

A definição de restrições por meio de uma superfície deslizante é um passo muito importante na construção de um controle por modo deslizante, pois caracteriza a dinâmica de modo deslizante para a qual o sistema será forçado e que deve atender a objetivos de controle especificados.

As restrições necessárias para o CMD de um sistema não linear (3.12), reescrito abaixo:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.13)$$

podem ser obtidas por meio de um processo iterativo com os seguintes passos: (i) fazer uma primeira escolha de superfície $\sigma(x) = 0$ com base na estrutura do sistema e nos objetivos de controle, (ii) calcular a dinâmica de modo deslizante, por exemplo, com o método do controle equivalente, (iii) verificar se a dinâmica resultante atende aos requisitos de controle desejados, por exemplo, com o estudo de estabilidade com funções de Lypunov e (iv) por fim, se a resposta obtida não for adequada, uma nova escolha de superfície deve ser realizada e o processo refeito iterativamente até que as características desejadas para o modo deslizante sejam atingidas [39, 50, 51]. Esse processo é ilustrado por meio do digrama mostrado na Figura 3.1.

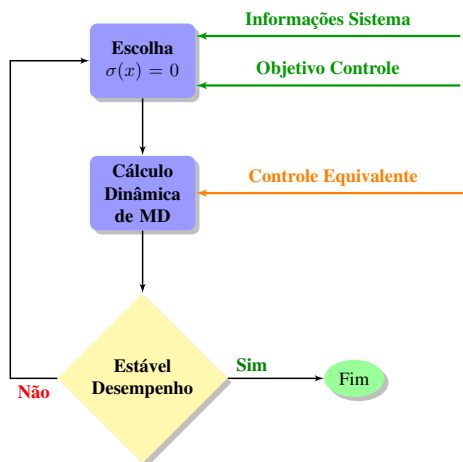


Figura 3.1 – Diagrama do processo de síntese de superfície deslizante.

Os principais métodos para o cálculo da dinâmica de modo deslizante são o método de Filippov e o de controle equivalente, devido a suas características serem generalistas [39, 50, 51]. Existem outros métodos que são mais adequados a sistemas que tenham estruturas construtivas específicas [51].

Neste trabalho, trata-se o cálculo da dinâmica de modo deslizante pelo método de controle equivalente, pois sua solução é direta e vantajosa para lidar com sistemas multivariáveis se comparada com o método de Filippov [50].

Dada uma escolha de superfície (3.9) para o sistema (3.12), com $u \in \mathbb{R}$, a ideia básica do método do controle equivalente consiste em se assumir que o sistema está em modo deslizante, e calcular uma lei de controle contínua, denominada controle equivalente, que verifica a condição de deslizamento $\sigma(x) = \dot{\sigma}(x) = 0$. A dinâmica de modo deslizante é, então, obtida pela aplicação dessa condição e do controle equivalente ao sistema (3.12) [39].

Considerando-se que o sistema (3.12) esteja em modo deslizante e, sem perda de generalidade, que sua condição inicial seja tal que $\sigma(0) = 0$, portanto $\sigma(x) = 0$ para todo $t > 0$. A partir da condição $\frac{d}{dt}\sigma(x) = \dot{\sigma}(x) = 0$, tem-se que:

$$\dot{\sigma}(x) = G(x) \cdot (f(x) + g(x) u_{eq}) = 0, \quad (3.14)$$

em que $G(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x}$, representa o gradiente de $\sigma(x)$. A lei de controle equivalente u_{eq} é calculada tal que a Equação (3.14) seja satisfeita. Essa equação representa o produto interno entre o vetor normal à superfície $G(x)$ e o vetor \dot{x} . Logo, a solução u_{eq} que faz com que esse produto seja zero, implica que \dot{x} esteja no espaço tangente à superfície, e a trajetória x esteja sobre a superfície.

Assumindo-se que $G(x) g(x)$ seja não singular para todo x , tem-se:

$$u_{eq} = -(G(x) g(x))^{-1} G(x) f(x). \quad (3.15)$$

O sistema em modo deslizante (3.8) é determinado aplicando-se a condição $\sigma(x) = 0$ e o controle equivalente (3.15) ao sistema (3.12).

Para facilitar a compreensão, considere o cálculo da dinâmica de modo deslizante do sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \phi(t) + u, \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que $\phi(t)$ representa perturbações. Dados: (i) a seguinte escolha de superfície:

$$\sigma(x) = x_3 + c_2 x_2 + c_1 x_1 = 0, \quad (3.17)$$

em que c_1 e c_2 são constantes positivas; (ii) e que exista um controle u que atende a estrutura (3.10) e capaz de forçar esse sistema ao modo deslizante.

Assumindo-se que o sistema (3.16) está em modo deslizante, o controle equivalente é calculado tal que se verifique:

$$\dot{\sigma}(x) = c_1 x_2 + c_2 x_3 + \phi(t) + u_{eq} = 0 \quad (3.18)$$

e, assim,

$$u_{eq} = -\phi(t) - c_2 x_3 - c_1 x_2. \quad (3.19)$$

Aplicando-se esse controle ao sistema (3.16), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -c_2 x_3 - c_1 x_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Todavia, esse sistema evolui sobre a restrição (3.17) que pode ser reescrita como:

$$x_3 = -c_2 x_2 - c_1 x_1, \quad (3.21)$$

que ao ser aplicada ao sistema (3.20) resulta na seguinte representação mínima do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Portanto, o sistema (3.16) controlado por um sinal de controle (3.10), que o força ao modo deslizante conduzindo suas trajetórias para a superfície (3.17), convergirá para a dinâmica de modo deslizante (3.22). Essa dinâmica tem ordem reduzida em relação ao sistema original e é invariante em relação ao termo de perturbação. Além disso, o ajuste das constantes c_1 e c_2 permite alocar os polos dessa dinâmica e garantir que as variáveis de estado convirjam à zero com um desempenho preestabelecido. Caso essas características não fossem atingidas, uma nova escolha de superfície deveria ser feita e a dinâmica de modo deslizante recalculada e reavaliada. Na sequência, a propriedade de robustez da técnica de CMD é generalizada pelo princípio de invariância, e leis de controle que garantam que o modo deslizante ocorra são estudadas.

3.2.2 Princípio de Invariância

Dados um sistema descrito por (3.7):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + h(x, t), \quad (3.23)$$

em que $h(x, t)$ representa perturbações, e uma superfície $\sigma(x) = 0$. Calcula-se a dinâmica de modo deslizante, sob a suposição de que o sistema (3.23) está em modo deslizante, tal que é válido que:

$$\dot{\sigma} = G(x) ((f(x) + g(x)u_{eq} + h(x, t)) = 0.$$

Resolvendo essa equação, tem-se que:

$$u_{eq} = - (G(x)g(x))^{-1} (G(x)f(x) + G(x)h(x, t)). \quad (3.24)$$

Substituindo-se (3.24) em (3.23) resulta que:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & f(x) - g(x) (G(x)g(x))^{-1} G(x)f(x) \\ & + (I_n - g(x) (G(x)g(x))^{-1} G(x))h(x, t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

O modo deslizante é invariante em relação ao vetor $h(x, t)$ se

$$h(x, t) \in \text{span}\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\}, \quad (3.26)$$

em que $g_i(x)$, com $i = 1, 2, \dots, m$, são os vetores colunas de $g(x)$, tal que exista um vetor $\gamma(x, t)$ que permite escrever:

$$h(x, t) = g(x)\gamma(x, t). \quad (3.27)$$

Substituindo (3.27) em (3.25), obtém-se como dinâmica de modo deslizante:

$$\dot{x} = f(x) - g(x) (G(x)g(x))^{-1} G(x)f(x). \quad (3.28)$$

Esse resultado demonstra que um modo deslizante na superfície $\sigma(x) = 0$ é invariante a qualquer perturbação $h(x, t)$ que seja alcançável pelo controle, isto é, que atenda a Equação (3.27). Essa propriedade é conhecida como princípio de invariância [39]. A seguir, são discutidas as leis de controle por modo deslizante de primeira e segunda ordem.

3.2.3 Controle por Modo Deslizante de Primeira Ordem

Dada a classe de sistemas não lineares afim no controle (3.12), representada como:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (3.29)$$

e considerando-se que uma superfície de deslizamento adequada é definida como (3.9):

$$\sigma(x) = 0. \quad (3.30)$$

Assim, uma lei de controle por modo deslizante de primeira ordem que força as trajetórias do sistema (3.29) à variedade $\mathcal{P}(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma(x) = 0\}$, pode ser definida como:

$$u = -k \text{sign}(\sigma(x)), \quad (3.31)$$

em que $\sigma(x)$ é a variável de chaveamento e k é um ganho escalar [39, 50, 51]. O gráfico mostrado na Figura 3.2 ilustra o comportamento do controle descontínuo em que a função sinal é definida como:

$$\text{sign}(x) \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

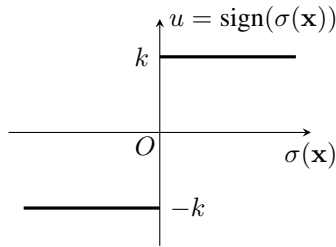


Figura 3.2 – Representação do controle do tipo relé usando a função sinal.

O ganho de controle k deve ser ajustado de tal forma que o sistema seja forçado ao modo deslizante. A delimitação dessa constante é, normalmente, obtida por meio de funções de Lyapunov. Um exemplo é a seguinte função quadrática:

$$V(x) = \sigma^2(x). \quad (3.33)$$

A condição de existência de modo deslizante consiste em se ajustar o ganho tal que:

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ para } \sigma(x) \neq 0 \quad (3.34)$$

A lei de controle (3.31) é a forma padrão de implementação de CMD1 e existem variações da técnica que podem ser encontradas nos trabalhos [39, 50, 51].

3.2.4 Controle por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite

Em uma implementação prática da técnica de CMD1 o sistema controlado pode sofrer com efeitos de *chattering*. Uma das soluções que pode ser adotada é a técnica de CMD1 com camada limite em que, diferentemente do CMD1 em que $\sigma(x) \rightarrow 0$, a variável de chaveamento é forçada para uma

camada de largura 2ε em torno da superfície deslizante, ou seja, $|\sigma(x)| \rightarrow \varepsilon$. Isto é realizado com a substituição da lei controle (3.31) pela seguinte lei:

$$u = -k \frac{\sigma(x)}{|\sigma(x)| + \varepsilon}, \quad (3.35)$$

sendo ε uma constante positiva. Assim, a descontinuidade do CMD1 (ver Figura 3.2) é substituída por uma resposta linear na região delimitada por ε , conforme ilustrado na Figura 3.3, em que é mostrado o gráfico de u (3.35) em função de $\sigma(x)$.

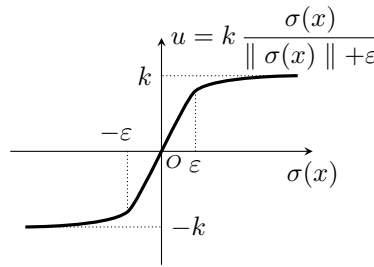


Figura 3.3 – Representação do controle com camada limite.

Consequentemente, as trajetórias de $\sigma(x)$ são confinadas em uma camada limite de largura 2ε , em torno da superfície $\sigma(x) = 0$. Em decorrência deste fato, a exatidão do modo deslizante é menor, pois as trajetórias são restritas a $|\sigma(x)| \leq \varepsilon$ e não mais a $\sigma(x) = 0$, e com isso há diminuição de robustez. Ademais, enfatiza-se que quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o tamanho da camada limite tende à zero e a lei de controle (3.35) tende a se comportar como a lei de controle (3.31) e torna-se passível aos efeitos do *chattering*. Este fenômeno é contornado aumentando o tamanho da camada limite por meio do ajuste de ε , que verifica, portanto, uma relação de proporcionalidade inversa entre redução de *chattering* e robustez.

Uma segunda opção para contornar o problema de *chattering* e manter robustez é estudada na sequência. Trata-se de uma aplicação de técnicas de controle por modo deslizante de segunda ordem.

3.2.5 Controle por Modo Deslizante de Segunda Ordem

O controle por modo deslizante de segunda ordem (CMD2) é empregado para forçar sistemas a modos deslizantes de segunda ordem, para os casos em que se tem uma superfície deslizante de primeira ou segunda ordem

(ver Definição 3.2). Grande interesse surgiu na aplicação do CMD2 aos casos em que se têm superfícies deslizantes de primeira ordem, devido ao fato de gerar leis de controle contínuas e, também, por prover maior exatidão ao modo deslizante frente a imperfeições de chaveamento do sinal de controle, comparada a exatidão oferecida pela técnica de CMD1 [44, 54]. Desta maneira, a técnica de CMD2 serve como uma opção interessante para atenuar os efeitos provenientes do fenômeno de *chattering* e garantir robustez [42, 43, 52, 55].

O CMD2 foi formulado nos trabalhos [44, 52] para a seguinte classe de sistemas:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (3.36)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é a entrada de controle e $f(x, u)$ uma função \mathbb{C}^1 . Note que a classe de sistema de interesse (3.12) é englobada por (3.36).

Definida uma superfície $\sigma(x) = 0$, tal que $\sigma(x) \in \mathbb{R}$ é uma função de classe \mathbb{C}^2 , e cujo grau relativo em relação à variável de entrada u é um, o objetivo é, então, determinar um controle contínuo que force o sistema (3.36) para a variedade $\mathcal{S}(x) = \{x \in \mathbb{R} : \sigma(x) = \dot{\sigma}(x) = 0\}$, ou seja, para um modo deslizante de segunda ordem (ver Definição 3.3). Essa solução é obtida considerando-se \dot{u} como entrada de controle em que se emprega o chaveamento e, desta forma, o sinal de entrada u será contínuo com derivada descontínua e uniformemente limitada.

As condições sob as quais é possível o desenvolvimento de algoritmos de controle capazes de forçar um modo deslizante de segunda ordem foram formuladas no trabalho de Levant [44]. Essas condições são detalhadas em [52, 55] e suas principais características são reproduzidas a seguir:

1. Os valores do sinal de controle pertencem ao conjunto $\mathcal{U} = \{u : |u| \leq U_M\}$, em que $U_M > 1$ é uma constante real positiva; além disso a solução do sistema é bem definida para todo tempo t , dado que u é contínuo $\forall t$ e $u \in \mathcal{U}$.
2. Existe $u_1 \in (0, 1)$, tal que para qualquer função continua u com $|u| > u_1$, existe um tempo t_1 , tal que $\sigma(x)u > 0$ para todo $t > t_1$. Isso implica que existe ao menos um tempo t tal que $\sigma(x) = 0$ dado que u seja adequado. Por exemplo, o controle $u = -\text{sign}(\sigma(x(0)))$, em que $x(0)$ é o estado inicial, faz com que a variedade $\mathcal{P}(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma(x) = 0\}$ seja atingida em tempo finito.
3. Dado que $\dot{\sigma}(x, u)$ seja a derivada temporal da variável de chaveamento

$\sigma(x)$, assim:

$$\ddot{\sigma}(x, u) = \frac{\partial \dot{\sigma}(x, u)}{\partial x} f(x, u) + \frac{\partial \dot{\sigma}(x, u)}{\partial u} \dot{u}. \quad (3.37)$$

Existem constantes positivas σ_0 , $u_0 < 1$, Ψ_m e Ψ_M , tais que se $|\sigma(x)| < \sigma_0$, então:

$$0 < \Psi_m < \frac{\partial}{\partial u} \dot{\sigma}(x, u) < \Psi_M, \quad \forall u \in \mathcal{U}, x \in \mathcal{X} \quad (3.38)$$

e se $|u| > u_0$, então $\dot{\sigma}(x, u) u > 0$, para $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$.

4. Existe uma constante positiva C tal que, na região $|\sigma(x)| < \sigma_0$, a seguinte desigualdade é válida :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(x, u) f(x, u) \right| \leq C, \quad (3.39)$$

$\forall t, x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}$.

A condição 2 significa que, iniciando de qualquer ponto no espaço de estado, é possível definir um controle adequado, u , capaz de conduzir a variável de chaveamento, $\sigma(x)$, para um conjunto tal que as condições limitantes da dinâmica de deslizamento, definidas pelas condições 3 e 4, são satisfeitas. Em particular, estas condições estabelecem que a segunda derivada temporal de $\sigma(x)$, $\ddot{\sigma}(x, u, \dot{u})$, quando evoluída com um valor fixo de controle u , é uniformemente limitada em um domínio limitado [52, 55].

Conforme já destacado, o sistema (3.12) é um caso particular do sistema (3.36), para o qual as condições podem ser relaxadas devido a esse ser afim no controle [52, 55, 56]. Essa simplificação é verificada na apresentação do algoritmo de *super-twisting*, técnica escolhida para construir o controle para o robô.

O algoritmo de controle *super-twisting* [44, 52, 55], destaca-se, dentre outros algoritmos de controle por modo deslizante de segunda ordem, por não depender da medição da primeira derivada temporal da variável de chaveamento $\dot{\sigma}(x)$ e tampouco da detecção de máximos e mínimos de $\sigma(x)$.

O problema de controle por modo deslizante de segunda ordem descrito anteriormente é equivalente à estabilização em tempo finito de um sistema auxiliar de segunda ordem incerto, descrito pelas variáveis $y_1 = \sigma(x)$ e $y_2 = \dot{\sigma}(x)$ como:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \phi(x, u) + \psi(x, u)\dot{u}, \end{cases} \quad (3.40)$$

em que:

$$\begin{aligned}\phi(x, u) &= \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(x, u) f(x, u) \\ \psi(x, u) &= \frac{\partial}{\partial u} \dot{\sigma}(x, u)\end{aligned}\tag{3.41}$$

para os quais se assume os limitantes:

$$\begin{aligned}|\phi(x, u)| &\leq C \\ 0 &< \Psi_m \leq \psi(x, u) \leq \Psi_M,\end{aligned}\tag{3.42}$$

que equivalem às condições 3 e 4, descritas anteriormente, para $\sigma(x) \leq \sigma_0$.

O algoritmo de controle *super-twisting* que estabiliza o sistema (3.40) sob tais condições, é composto de dois termos [44]:

$$\begin{aligned}u &= u_1 + u_2 \\ u_1 &= \begin{cases} -a |\sigma_0|^\rho \text{sign}(y_1) & \text{se } |y_1| > \sigma_0 \\ -a |y_1|^\rho \text{sign}(y_1) & \text{se } |y_1| \leq \sigma_0 \end{cases} \\ \dot{u}_2 &= \begin{cases} -u & \text{se } |u| > 1 \\ -b \text{sign}(y_1) & \text{se } |u| \leq 1 \end{cases}\end{aligned}\tag{3.43}$$

As condições suficientes para a convergência em tempo finito das trajetórias do sistema (3.40) para a variedade $\mathcal{M}_2(x) = \{x \in \mathbb{R}^n : y_1 = y_2 = 0\}$, por meio do algoritmo (3.43) foram determinadas como [44, 52, 55]:

$$\begin{aligned}b &> \frac{C}{\Psi_m} \\ a^2 &\geq \frac{4C}{\Psi_m^2} \frac{\Psi_M(b+C)}{\Psi_m(b-C)} \\ 0 &< \rho \leq 0,5\end{aligned}\tag{3.44}$$

Para o caso do sistema (3.12), que é afim no controle, o algoritmo de *super-twisting* pode ser simplificado. Ocorre que a função $\psi(\cdot)$, que descreve o sistema auxiliar (3.40), depende apenas de x e não mais do sinal de controle u e, assim, tem-se que a limitação de $\psi(x)$ pode ser relaxada. Neste caso, pode-se considerar $\sigma_0 = \infty$ e o algoritmo de controle se reduz a:

$$\begin{aligned}u &= u_1 + u_2 \\ u_1 &= -a |y_1|^{1/2} \text{sign}(y_1) \\ \dot{u}_2 &= -b \text{sign}(y_1),\end{aligned}\tag{3.45}$$

para o qual valem as mesmas condições de convergência (3.44) e arbitra-se $\rho = \frac{1}{2}$ para garantir boa convergência [44, 52, 55].

Observação 3.1 Note que o sinal do primeiro termo u_1 de (3.45) em função de $\sigma(x)$ é representado conforme mostrado na Figura 3.4, e, portanto, é similar à resposta da lei de controle de camada limite representada na Figura 3.3. Assim, conclui-se que u_1 garante robustez equivalente à do controle com camada limite em que se tem menor robustez. Portanto, cabe ao termo u_2 garantir o diferencial de robustez do algoritmo *super-twisting*.

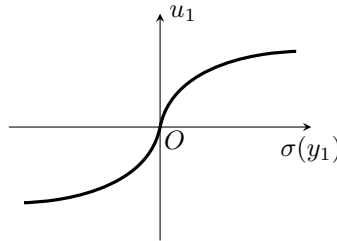


Figura 3.4 – Resposta do termo de controle u_1 da lei de controle (3.45).

As trajetórias do sistema sob o controle *super-twisting* sofrem torções, em Inglês *twists*, em torno da origem do plano de fase formado por $\sigma(x)$ e $\dot{\sigma}(x)$ conforme mostrado na Figura 3.5, justificando o nome da técnica. As

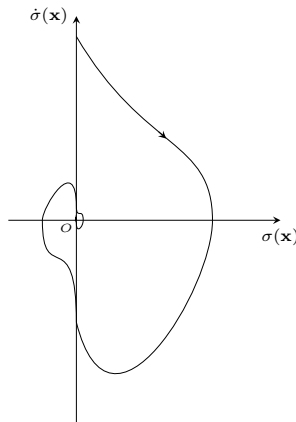


Figura 3.5 – Representação do plano de fase do algoritmo *super-twisting*.

condições de convergência expressas pela Equação (3.44) foram determinadas por Levant [44] a partir de uma abordagem geométrica. O comportamento do sistema em malha fechada foi analisado por meio da representação do sistema auxiliar (3.40) por inclusões diferenciais. As condições (3.44) são determinadas de forma a garantir que a sequência de pontos $\{\dot{\sigma}_i(x)\}$, que cortam o eixo $\sigma(x) = 0$ no plano de fase, (ver Figura 3.5), satisfaça $|\frac{\dot{\sigma}_{i+1}(x)}{\dot{\sigma}_i(x)}| < \kappa < 1$.

3.3 Conclusão

Neste capítulo foram descritas as técnicas de dinâmica inversa e de controle por modo deslizante que serão utilizadas nos estudos dos próximos capítulos. A primeira técnica consiste em uma compensação das forças e torques conhecidos que atuam sobre o sistema e rastreamento de trajetórias de referência para sistemas mecânicos. A segunda técnica estudada emprega leis de controle com descontinuidade, para forçar o sistema a atender as restrições que garantam que os objetivos de controle sejam atingidos, tais como, regulação e rastreamento de trajetórias. Foram estudadas a técnica de controle por modo deslizante de primeira ordem, CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting*.

O controle por modo deslizante de primeira ordem, idealmente, oferece invariância a perturbações alcançáveis pelo controle. Contudo, o fenômeno de *chattering* atinge essa técnica em implementações práticas, em que existem dinâmicas negligenciadas, que podem ser excitadas pelo chaveamento em alta frequência do sinal de controle, e limitações na frequência em que se possa chavear o sinal de controle, que podem causar *chattering*. Este fenômeno é indesejado por gerar oscilações nas variáveis de estado do sistema que diminuem a robustez do controle e a eficiência energética e causam desgastes de partes mecânicas móveis. Duas soluções foram estudadas: a primeira, o controle por modo deslizante de primeira ordem com camada limite, que contorna o problema, no entanto, com redução da robustez característica da técnica; e a segunda, um controle por modo deslizante de segunda ordem, o *super-twisting*, que reduz os efeitos do fenômeno indesejado e sem a consequente perda de robustez.

Capítulo 4

Controle do Robô Móvel sobre Rodas Diferencial

Sumário

| | | |
|------------|--|-----------|
| 4.1 | Descrição do Problema e Proposta de Controle . . . | 60 |
| 4.2 | Síntese do Controle Dinâmico | 66 |
| 4.3 | Síntese dos Controladores Cinemáticos | 69 |
| 4.3.1 | Formulação da Estratégia de Rastreamento de Controle | 70 |
| 4.3.2 | Síntese da Superfície de Deslizamento | 71 |
| 4.3.3 | Síntese das Leis de Controle por Modo Deslizante | 76 |
| 4.3.4 | Controle Cinemático por Modo Deslizante de Se- gunda Ordem Super-Twisting | 84 |
| 4.4 | Considerações Finais | 88 |

A navegação autônoma de um robô móvel envolve percepção, tomada de decisão e ação. Para gerir estas funções são necessários: (i) um sistema de sensoriamento que ofereça informações de localização e orientação do robô, assim como informações da estrutura do ambiente de operação; (ii) um sistema de navegação que gerencie essas informações, que gere trajetórias factíveis ao robô e tome decisões; (iii) e um sistema de controle cuja ação deve garantir que o robô realize o deslocamento desejado.

Neste trabalho, dá-se foco ao robô móvel sobre rodas diferencial, composto, basicamente, de um chassi montado sobre duas rodas simples atuadas de forma diferencial em um mesmo eixo, e sobre outras duas rodas livres para sustentação.

Assume-se que o RMRD possui sistemas de sensoriamento e de navegação, ou seja, que sua postura é conhecida, trajetórias factíveis são dadas, e que há um sistema supervisorio tomando decisões. Dadas essas premissas, dedica-se este capítulo à síntese de controle que garanta rastreamento de trajetória de postura e proporcione robustez frente a dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas e perturbações externas.

A proposta consiste no desenvolvimento de uma malha de controle composta por um controlador dinâmico e em cascata com um controle cinemático. A função do primeiro é compensar as forças e torques atuantes no sistema e rastrear as referências de velocidade fornecidas pelo controlador cinemático, que tem por objetivo o rastreamento robusto de trajetórias de postura do robô.

4.1 Descrição do Problema e Proposta de Controle

Um robô móvel autônomo se desloca com a assistência de sistemas de sensoriamento, navegação e controle, que o permitem interagir com o ambiente, desviar de obstáculos e seguir trajetórias desejadas. Portanto, para gerir o deslocamento autônomo do robô são requeridos:

- Estudo do comportamento do sistema e do ambiente em que o robô se insere. Gerar modelos matemáticos e determinar os tipos de perturbações e incertezas que podem acometer o sistema. Definir as características do ambiente, podendo haver necessidade de construir modelos para estudos focados na navegação. Dessa maneira, forma-se uma estrutura de projeto que permite definir e sintetizar trajetórias e controladores, realizar simulações e análises.
- Acesso a informações do sistema e do ambiente de operação. Utilizam-se sistemas de sensoriamento para determinar, por exemplo, a localização, a orientação e a velocidade do robô e de possíveis obstáculos.
- Geração de trajetórias factíveis ao robô, respeitando, além das restrições de movimento do sistema, perfis de velocidade e aceleração, limites de torque dos acionadores e condições iniciais.
- Síntese de controladores capazes de lidar com não linearidades, restrições não holonômicas, subatuação, incertezas e perturbações inerentes ao sistema robótico e seu ambiente.
- Sistema de navegação para gerir e supervisionar as informações de sensores, a geração de trajetória e o funcionamento dos controladores.

Neste trabalho aborda-se o controle para o RMRD que, conforme já mencionado, consiste de um chassi montado sobre duas rodas livres para sustentação e duas rodas simples atuadas. Motores DC são empregados para acioná-las permitindo ao robô realizar trajetórias factíveis. Além disso, têm-se circuitos de potência para o acionamento dos motores, sistemas eletrônicos, unidades de processamento e sistemas computacionais.

A estrutura desse robô confere, além de comportamento não linear, limitações de movimentos que o enquadram na classe de sistemas não holonômicos e subatuados, conforme já discutido anteriormente.

O objetivo de controle que se deseja atender é o rastreamento robusto de trajetórias, que são descritas em função das coordenadas de postura do RMRD, tal que os erros de rastreamento sejam pequenos. A síntese de controle será realizada assumindo-se que existe um sistema de navegação que fornece trajetórias factíveis e que, por meio de um sistema de sensoriamento, disponibiliza as informações de postura do robô, além de gerir e supervisionar seu funcionamento.

Definição 4.1 *Neste trabalho delimita-se geometricamente as trajetórias factíveis para o RMRD como aquelas que podem ser realizadas por meio da combinação de seus movimentos básicos, deslocamentos para frente, para trás e rotacionais, e ainda, cujas condições iniciais coincidam com a condição inicial do robô, ou estão à frente do robô em um movimento para frente, ou estão atrás do robô em movimento para trás. Além disso, supõe-se que os ângulos de partida reflitam erros de orientação do robô menores ou iguais a $\pm \frac{\pi}{3}$.*

Mantendo coerência com as referências dadas em postura, toma-se como base para o desenvolvimento do controle, o modelo de postura do robô em espaço de estado desenvolvido no Capítulo 2, que é reescrito abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pos}(\theta)\eta \\ \bar{M}_{pos}^{-1} \left(\bar{B}_{pos}\tau - \bar{\tau}_p - \bar{C}_{pos}(\dot{\theta})\eta \right) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

em que¹:

$$S_{pos}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_{pos} = \begin{bmatrix} m_{nom} & 0 \\ 0 & I_{nom} \end{bmatrix},$$

¹O subíndice *pos* foi introduzido no Capítulo 2 para diferenciar as matrizes do modelo de postura e de configuração e o subíndice *nom* para identificar os parâmetros nominais do sistema.

$$\begin{aligned}\bar{C}_{pos}(\dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} 0 & -d_{nom} m_{nom} \dot{\theta} \\ d_{nom} m_{nom} \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} e \\ \bar{B}_{pos} &= \begin{bmatrix} \frac{r_{nom}}{2} & \frac{r_{nom}}{2} \\ \frac{r_{nom}}{2b_{nom}} & -\frac{r_{nom}}{2b_{nom}} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

e, ainda, parâmetros nominais do robô são dados pela massa m_{nom} , a inércia I_{nom} , o raio das rodas r_{nom} , e os parâmetros geométricos do robô d_{nom} e b_{nom} .

Tem-se, ainda, que os vetores de postura ξ , velocidade η e torque τ , foram definidos como:

$$\xi = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

e o vetor $\bar{\tau}_p$ representa perturbações externas e incertezas.

Na primeira linha do modelo (4.1) tem-se a representação da cinemática do RMRD, em que fica clara a questão de subatuação do sistema, pois se tem três graus de liberdade representados pela postura do robô, $\xi \in \mathbb{R}^3$, e dois graus de atuação, $\eta \in \mathbb{R}^2$. Ao passo que o comportamento dinâmico do sistema é descrito na segunda linha em função do vetor de velocidade $\eta \in \mathbb{R}^2$, que representa os graus de liberdade do sistema a serem controlados pelas entradas de torque nas rodas $\tau \in \mathbb{R}^2$ e, portanto, é totalmente atuado.

Esse modelo foi desenvolvido considerando-se que o RMRD é um corpo único que se desloca no plano com as restrições de movimento e desconsiderando-se dinâmicas de atuadores, sensores e outros dispositivos eletrônicos. A existência de perturbações, incertezas e dinâmicas negligenciadas no modelo justificam a busca por estratégias de controle robusto. A técnica de controle por modo deslizante, devido a sua robustez e bom desempenho [39], tem sido empregada como solução de controle em robótica móvel [17–19, 32] e, portanto, é tomada como base para o desenvolvimento de uma estratégia de controle robusto para a solução do problema abordado.

A síntese padrão dessa técnica é conhecida como controle por modo deslizante de primeira ordem (CMD1) e consiste em forçar, por meio de uma lei controle de chaveamento em alta frequência, as trajetórias do sistema a restrições previamente definidas na forma de uma superfície, levando, dessa maneira, o sistema a um modo deslizante estável e de bom desempenho. Em casos ideais, em que o sistema é bem conhecido e não se tem limitação da frequência de chaveamento do sinal de controle, o CMD1 oferece ao sistema em malha fechada invariância a incertezas paramétricas e perturbações alcançáveis pelo controle. Apesar disso, em implementações práticas, este controle é sujeito ao fenômeno de *chattering*. Ocorre que nestes casos existem dinâ-

micas negligenciadas, que são excitadas pelo sinal de controle, e limitação na frequência de chaveamento devido às restrições de funcionamento dos dispositivos físicos utilizados na implementação do controle. Decorrente destes fatos, surgem oscilações com amplitude e frequência limitadas sobre as variáveis de estado do sistema, fenômeno denominado *chattering*, e tem como consequência a redução da exatidão do modo deslizante e da eficiência energética, além de desgastes de partes móveis do sistema, conforme discutido no Capítulo 3.

A robustez da técnica CMD é intrinsecamente ligada à exatidão com que o sistema atende às restrições impostas. Portanto, dada a escolha de uma superfície deslizante, é necessária uma lei de controle capaz de forçar o sistema ao modo deslizante com exatidão em detrimento a deficiências na frequência de chaveamento e a existência de dinâmicas não modeladas. O problema de deficiência da frequência de chaveamento pode ser amenizado com o uso de equipamentos e programas adequados no robô. Contudo, sempre existirá uma limitação que mereça atenção, por ser um fator de influência no desempenho e robustez do controle.

Estudos sobre a excitação de dinâmicas não modeladas de primeira e segunda ordem na malha de controle, indicam que o *chattering* é relacionado à amplitude do sinal de controle e a constante de tempo dessas dinâmicas [39, 40, 43]. Na literatura de CMD1, são exploradas soluções em que se evita as descontinuidades ou usa-se ganhos variáveis nas leis de controle [39, 40]. Outrossim, pode-se buscar alguma solução de controle que permita diminuir os efeitos associados às constantes de tempo de tais dinâmicas sobre a malha de controle, contribuindo para melhorar a resposta ao *chattering*, conforme será explorado na sequência com a proposta do controle.

Nos trabalhos de Utkin, Guldner e Shi [39] e Lee e Utkin [40] são apresentadas soluções para os casos em que há dinâmicas negligenciadas em uma malha de CMD1, dentre as quais se podem citar as técnicas de ganho dependente de estado, de camada limite e a baseada em observador. Essas soluções, apesar de atenuarem o *chattering*, implicam em redução de robustez, conforme mencionado no Capítulo 3. A técnica de CMD1 com camada limite é mais difundida pela sua simplicidade e é comumente empregada no rastreamento de trajetória por modo deslizante para RMRs [17, 19]. Essa técnica consiste na troca da função sinal, normalmente empregada na sua lei controle, por uma aproximação contínua. Por exemplo, nos trabalhos [17, 19] a função de saturação é empregada no lugar da função sinal para contornar o problema de *chattering* e forçar o modo deslizante. Como produto dessa solução, têm-se leis de controle contínuas que confinam as trajetórias do sistema em uma camada em torno da superfície e que, assim, tem menos exatidão no modo deslizante e redução de robustez proporcional ao tamanho da camada.

Os trabalhos de Yang e Kim [17] e Chwa [19] podem ser citados como os principais trabalhos, que tratam o problema de rastreamento de trajetória de postura de RMRD com controle por modo deslizante. Em ambos os trabalhos, se aplica um compensador de dinâmica inversa, assumindo-se que a dinâmica do sistema é bem conhecida e similar ao modelo apresentado em (4.1), entretanto representada em coordenadas polares. Então, para o controle do sistema compensado são propostos controladores baseados em CMD1, em que se emprega a camada limite para evitar os problemas de *chattering*. A diferença dos trabalhos encontra-se na construção das superfícies deslizantes, que são descritas em termos de erros de postura e velocidades.

No trabalho de Yang e Kim [17] são apresentados resultados experimentais em que se pode verificar que o controle com camada limite é capaz de contornar o *chattering*, porém a custo da redução de robustez. Esse fato pode ser verificado pela magnitude do erro de postura, que converge a valores em torno de 2 cm para um robô de dimensões 7,5 cm \times 7,5 cm \times 7,5 cm, ou seja, o erro é de aproximadamente 25% da largura ou do comprimento do robô. No trabalho de Chwa [19], são apresentados apenas resultados de simulações, em que se considerou compensação exata da dinâmica, ou seja, um ambiente ideal. Mesmo que a superfície projetada ofereça um modo deslizante com desempenho melhor que do caso anterior, a exatidão com que o sistema é forçado ao modo deslizante é limitada pela escolha do CMD1 com camada limite, que implica em redução de robustez.

Como já mencionado a robustez oferecida por um CMD está relacionada com a exatidão com que se garante que o sistema seja mantido em modo deslizante. Uma questão surge desse fato: É possível obter um CMD que force o sistema ao modo deslizante com boa exatidão e que, assim, mantenha boa robustez em detrimento a limitação de chaveamento e existência de dinâmicas não modeladas?

Como resposta para essa pergunta, tem-se uma aplicação da técnica de controle por modo deslizante de segunda ordem que permite mitigar os efeitos de *chattering* e manter boa robustez, pois garante melhor exatidão de convergência em modo deslizante [41–43, 52, 55, 56]. Nesse caso, força-se um modo deslizante de segunda ordem considerando a derivada da entrada do sistema como variável de controle, em que é empregado o chaveamento de alta frequência, gerando leis de controle contínuas [44, 52, 54]. Além disso, técnicas de CMD2 são mais precisas que as de CMD1 com relação a imperfeições de chaveamento, conforme demonstrado por Levant [44] e apontado em outros trabalhos [52, 54]. Destaca-se, portanto, que essa solução reduz significativamente os efeitos de *chattering* como resultado de sua concepção e garante boa exatidão em modo deslizante. Resultados mostrados por Boiko e Fridman [54] e Boiko, Fridman, Pisano et al. [43] comprovam esse fato,

contudo constatam que permanece uma relação entre o fenômeno de *chattering* e a constante de tempo das dinâmicas negligenciadas, como no caso do CMD1.

Dentre os trabalhos que exploram essa solução podem-se destacar aqueles que tratam o controle de sistemas mecânicos em geral [21, 57–60], e o trabalho de Ferrara e Rubagotti [18] que utiliza um CMD2, denominado de controle subótimo, em uma aplicação de desvio de obstáculos e redução de *chattering* para um RMR.

Retomando-se o objetivo deste trabalho, este consiste em sintetizar um controle por modos deslizantes para o rastreamento robusto de trajetórias de postura para o RMRD, que é um sistema não holonômico e subatuado, pode-se, então, destacar os principais desafios a serem contornados, sendo eles: a existência de não linearidades, incertezas paramétricas, perturbações externas de carga e dinâmicas negligenciadas. Além disso, enfatiza-se que a natureza não holonômica do robô resulta em um representação matemática em espaço de estado composta de um modelo cinemático subatuado e de um modelo dinâmico completamente atuado. Dado esse cenário, a proposta para solucionar o problema consiste em explorar essa representação do sistema por meio da construção de uma malha de controle composta por um controlador dinâmico em cascata com um controlador cinemático, conforme ilustrado na Figura 4.1.

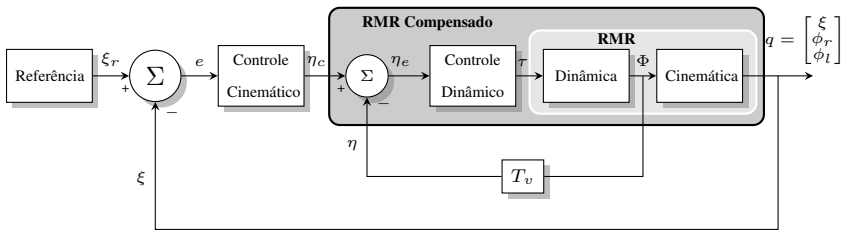


Figura 4.1 – Estrutura de controle em cascata para um RMR.

O controlador dinâmico é sintetizado para compensar as dinâmicas conhecidas representadas no modelo (4.1) e estabilizar o erro entre as velocidades do robô η e o sinal de controle cinemático η_c , suficientemente rápido em detrimento a dinâmicas negligenciadas e, de tal forma, que o sistema compensado da Figura 4.1, possa ser interpretado como:

$$\dot{\xi} = S_{pos}(\theta)\eta + h(\xi, t), \quad (4.3)$$

em que $S_{pos}(\theta)\eta$ refere-se ao comportamento cinemático do robô (4.1) e o termo $h(\xi, t)$ representa incertezas paramétricas e perturbações alcançáveis

por η . Um controle de dinâmica inversa com controle proporcional mais derivativo (PD) é empregado nessa solução, pois compensa as dinâmicas modeladas e permite que a constante de tempo da malha interna, que é influenciada pela constante de tempo de dinâmicas negligenciadas, seja ajustada pela sintonia do PD. Assim, essa opção agrega um grau de liberdade de controle importante para mitigar efeitos de *chattering*. Pode-se, então, sintetizar o controle cinemático por meio de um CMD2 com base no comportamento cinemático descrito em (4.1), cujas propriedades permitem tratar com robustez o problema em relação ao termo $h(\xi, t)$ descrito em (4.3), sob a ótica do princípio de invariância, discutido no Capítulo 3.

O algoritmo de *super-twisting* foi escolhido para projetar o controle cinemático por modo deslizante de segunda ordem. Esse oferece bom desempenho numérico e depende apenas da variável de chaveamento, que não é o caso das outras técnicas de CMD2, pois depende da derivada no tempo ou da detecção dos pontos de máximo, de mínimo ou de inflexão dessa variável [44, 52, 55].

Frisa-se que devido a subatuação no comportamento cinemático do RMRD, conforme visto na Eq. (4.1), será necessária a obtenção de uma superfície de deslizamento específica, que seja capaz de lidar com essa característica do sistema e garantir o rastreamento de trajetórias.

As sínteses dos controladores propostos e de controladores cinemáticos por CMD1, CMD1 com camada limite e de um controle de dinâmica inversa com ação proporcional são apresentadas na sequência. Os controladores adicionais serão utilizados, no próximo capítulo, para estudos comparativos com o objetivo de demonstrar a eficiência da solução proposta.

O estudo é iniciado com a síntese dos controladores de dinâmica inversa apresentados na Seção 4.2. Em seguida, na Seção 4.3, são apresentados os controladores por modo deslizante. Considerações finais e análises são discutidas na Seção 4.4.

4.2 Síntese do Controle Dinâmico

Dado o comportamento das dinâmicas conhecidas do robô descrito em função da variável de velocidade $\eta \in \mathbb{R}^2$, conforme expresso na Equação (4.1) e reescrito abaixo:

$$\dot{\eta} = \bar{M}_{pos}^{-1} \left(\bar{B}_{pos} \tau_c - \bar{C}_{pos}(\dot{\theta}) \eta \right), \quad (4.4)$$

em que $\tau \in \mathbb{R}^2$ foi substituído por $\tau_c \in \mathbb{R}^2$ para evidenciar que esse é o sinal de controle e $\bar{\tau}_p$, termo que representa perturbações e incertezas, é suprimido por ser desconhecido. O objetivo do controle dinâmico é prover um

signal τ_c que garanta que a referência de velocidade η_c dada pelo controle cinemático seja rastreada com tempo de resposta pequeno. Como estratégia de controle pretende-se compensar as forças e torques conhecidos de tal forma a obter-se um sistema linear a ser controlado por meio de controladores de ação proporcional ou proporcional mais derivativa sobre o erro de seguimento de velocidade $\eta_e = \eta_c - \eta$.

Servindo-se da teoria de controle de dinâmica inversa estudada na Seção 3.1, uma lei controle que compensa as forças e torques conhecidos atuantes sobre o robô é determinada como:

$$\tau_c = \bar{B}_{pos}(\xi)^{-1} \left(\bar{C}_{pos}(\dot{\theta})\eta + \bar{M}_{pos}\bar{u} \right), \quad (4.5)$$

em que

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_l \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

deve ser sintetizado para estabilizar o sistema resultante da aplicação do controle (4.5) no sistema (4.4):

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_l \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

garantindo que a referência de velocidade η_c , proveniente do controlador cinemático, seja rastreada. Para isso, o sinal de controle \bar{u} deve garantir que o erro de velocidade $\eta_e = \eta_c - \eta$ seja levado a zero.

Duas propostas são estudadas para desempenhar este objetivo. A primeira consiste de um controle de ação proporcional (P) e a segunda de ação PD em estrutura paralela [61].

A lei de controle de ação proporcional para \bar{u} é definida como:

$$\bar{u} = \dot{\eta}_c + K_p \eta_e \quad (4.8)$$

para a qual se tem que $\dot{\eta}_c \in \mathbb{R}^2$ é a derivada temporal do sinal de controle cinemático e $K_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz de ganhos de controle.

A aplicação da lei de controle (4.8) ao sistema (4.7) resulta na seguinte dinâmica de erro:

$$\dot{\eta}_e = -K_p \eta_e. \quad (4.9)$$

O sistema (4.9) é estável para $K_p > 0$, cujos valores de ajuste devem ser suficientemente grandes tal que um tempo de resposta pequeno seja assegurado. Apesar do controle proporcional se adequar bem aos casos em que o sistema é bem conhecido, seu desempenho associado ao CMD pode ser comprometido frente a dinâmicas não modeladas. Isso faz com que seja necessária a escolha de uma estratégia de controle mais sofisticada como, por

exemplo, um controle de ação proporcional mais derivativa, posto que a ação derivativa cumpre bem a necessidade de acelerar a resposta de um sistema.

O sistema (4.7) pode ser estudado no domínio da frequência para facilitar a síntese dos controladores PD. O sistema em malha fechada desejado é representado por dois diagramas de blocos referentes às velocidades linear v e angular w , conforme mostrado na Figura 4.2. Cada diagrama é composto por um sistema integrador e pelo respectivo controlador, $C_v(s)$ ou $C_w(s)$. Frisa-se que o projeto de controle tem por objetivo estabilizar os erros entre as velocidades de referência (v_c e w_c) e as velocidades do robô (v e w), dados por $v_e(s) = v_c(s) - v(s)$ e $w_e(s) = w_c(s) - w(s)$ ou em representação vetorial $\eta_e(s) = \eta_c(s) - \eta(s)$.

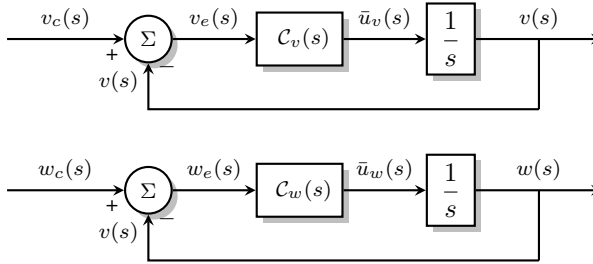


Figura 4.2 – Diagrama de blocos do controle em malha fechada do sistema integrador (4.7).

Portanto, para cumprir esse objetivo a síntese dos controladores $C_v(s)$ e $C_w(s)$ é feita por meio da técnica de controle proporcional mais derivativo e, assim as funções de transferência entre $v_e(s)$ e $\bar{u}_v(s)$ e entre $w_e(s)$ e $\bar{u}_w(s)$ são dadas, respectivamente, por:

$$C_v(s) = \frac{v_e(s)}{\bar{u}_v(s)} = k_{p_v} + \frac{k_{d_v} N_v}{1 + \frac{N_v}{s}} \quad (4.10)$$

$$C_w(s) = \frac{w_e(s)}{\bar{u}_w(s)} = k_{p_w} + \frac{k_{d_w} N_w}{1 + \frac{N_w}{s}}$$

em que k_{p_v} e k_{p_w} representam os ganhos proporcionais, k_{d_v} e k_{d_w} ganhos derivativos, ao passo que N_v e N_w são os parâmetros de ajuste do filtro do termo derivativo dos controladores. Esses parâmetros devem ser ajustados com valores positivos para garantir a estabilidade para o sistema (4.7) e seus módulos devem ser definidos de forma a obter-se um desempenho em que a malha interna estabilize suficientemente rápido em relação à malha externa de controle considerando como critério, por exemplo, tempo de resposta.

Na seção que segue são apresentadas as sínteses de controladores cinemáticos com base em técnicas de controle por modo deslizante.

4.3 Síntese dos Controladores Cinemáticos

As sínteses dos controladores cinemáticos para o RMRD por meio das técnicas de CMD1, CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting* são tratadas nesta seção, partindo da premissa que o controle dinâmico cumpre seus objetivos. Assim o sistema compensado (4.3) é tomado como base para essas sínteses, para o qual as perturbações representadas por $h(x, t)$ podem ser suprimidas conforme o modelo (4.1).

O objetivo do controle cinemático é rastrear as trajetórias descritas pelas coordenadas de postura utilizando as velocidades linear e angular do robô como entradas de controle. Como solução, adota-se uma estratégia de rastreamento em que o RMRD deve seguir um robô de referência fictício, conforme é ilustrado na Figura 4.3. Este robô fictício deve ter, obrigatoriamente, as mesmas características cinemáticas que o RMRD tratado, de tal maneira que representa o comportamento adequado a ser reproduzido pelo robô ao rastrear uma trajetória factível. Esta estratégia foi adotada, por permitir a descrição de uma dinâmica de erro de rastreamento de trajetória apropriada à síntese de controle [9, 62].

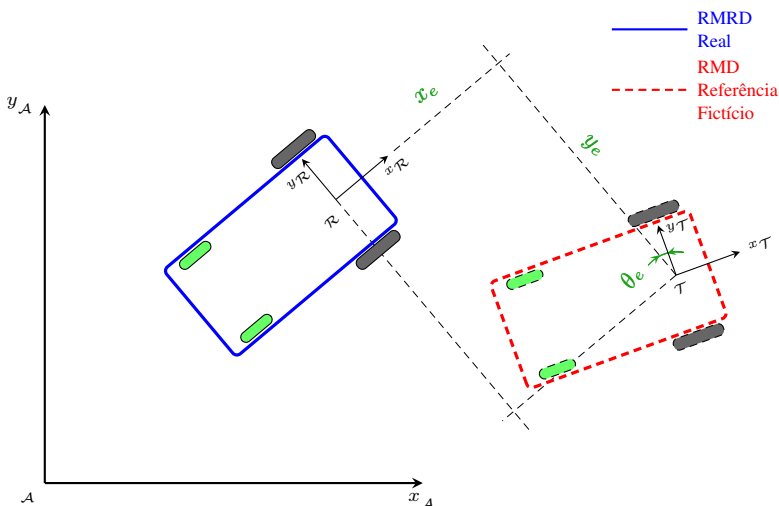


Figura 4.3 – Estratégia de rastreamento de um RMRD de referência.

Na sequência essa estratégia é formulada e as sínteses dos controladores são apresentadas, com base na teoria estudada no Capítulo 3. Inicia-se pela síntese da superfície de deslizamento para, então, abordar a síntese dos controladores CMD1, CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting*.

4.3.1 Formulação da Estratégia de Rastreamento de Controle

A estratégia adotada para cumprir com a tarefa de rastreamento de trajetórias factíveis para o RMRD, conforme já discutido, consiste em se considerar que esse robô segue um robô de referência fictício cujas características cinemáticas são iguais, conforme é ilustrado na Figura 4.3. A meta é obter uma dinâmica de erro de rastreamento de trajetória adequada à síntese de controle.

O comportamento cinemático do RMRD foi modelado como:

$$\dot{\xi} = S_{pos}(\xi)\eta, \quad (4.11)$$

em que

$$S_{pos}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \text{ e } \eta_c = \begin{bmatrix} v_c \\ w_c \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

sendo v_c e w_c consideradas entradas de controle em velocidade, e, ainda, ξ representa o vetor de postura do robô.

Seguindo as premissas da estratégia de rastreamento o modelo cinemático do RMRD de referência fictício deve ser representado por:

$$\dot{\xi}_r = S_{r_{pos}}(\xi_r)\eta_r \quad (4.13)$$

em que:

$$S_{r_{pos}}(\xi_r) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & 0 \\ \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{bmatrix}, \text{ e } \eta_r = \begin{bmatrix} v_r \\ w_r \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

sendo, ainda, ξ_r e η_r referências de postura e velocidade, respectivamente.

O erro de rastreamento de trajetória é definido como a diferença entre os vetores de postura dos robôs $\xi_r - \xi$, expresso sobre o sistema inercial \mathcal{A} e rotacionado para o sistema de referência \mathcal{R} do RMRD, conforme ilustrado na Figura 4.3:

$$\xi_e = {}^{\mathcal{R}}R_{\mathcal{A}}(\theta)(\xi_r - \xi), \quad (4.15)$$

em que ${}^{\mathcal{R}}R_{\mathcal{A}}$ representa a matriz de rotação do sistema de coordenadas \mathcal{A} para o \mathcal{R} , dada por:

$${}^{\mathcal{R}}R_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Assim, o erro de postura é expresso no sistema de referência do robô \mathcal{R} , o que implica em uma dinâmica de erro dependente apenas de ξ_e e das velocidade η e η_r [9].

Este erro pode ser definido, também, como $\tilde{\xi}_e = {}^{\mathcal{T}}R_{\mathcal{A}}(\theta_r)(\xi - \xi_r)$, conforme mostrado no trabalho de Morin e Samson [62], ou seja expresso no sistema de referência do robô fictício \mathcal{T} . Contudo, optou-se pelo erro (4.15), pois resulta em uma dinâmica cuja estrutura consiste de uma matriz de entrada linear em relação a ξ_e , que facilita a síntese da superfície deslizante, como é visto adiante.

Diferenciando no tempo (4.15) e realizando as devidas simplificações, obtém-se a dinâmica de erro de rastreamento de trajetória como:

$$\dot{\xi}_e = f(\theta_e, \eta_r) + g(x_e, y_e)\eta_c, \quad (4.17)$$

para a qual:

$$\xi_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix}, \quad f(\theta_e, \eta_r) = \begin{bmatrix} v_r \cos(\theta_e) \\ v_r \text{sen}(\theta_e) \\ w_r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (4.18)$$

$$g(x_e, y_e) = \begin{bmatrix} -1 & y_e \\ 0 & -x_e \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que $g(\xi_e)$ é uma matriz de entrada linear em relação a ξ_e . Essa dinâmica pode ser expressa, de forma compacta, como:

$$\dot{\xi}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_c y_e + v_r \cos(\theta_e) - v_c \\ -w_c x_e + v_r \text{sen}(\theta_e) \\ w_r - w_c \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Além disso, arbitra-se que a medida de θ_e é feita entre $-\pi$ e π .

Observação 4.1 *Dada a Definição 4.1 em que se delimitam as trajetórias factíveis e suas condições iniciais e o fato de medir-se o erro ξ_e no sistema \mathcal{R} , a síntese de um CMD permite fazer com que as trajetórias do erro x_e converjam monotonicamente para uma região em torno de zero em que seus valores têm módulos pequenos o suficiente, tal que, pode-se assumir que o erro x_e é, sempre, positivo para movimentos para frente, e negativo para movimentos para trás.*

4.3.2 Síntese da Superfície de Deslizamento

A síntese da superfície de deslizamento é a primeira etapa na construção do controle por modo deslizante. Conforme discutido no Capítulo 3, a superfície é obtida por um processo iterativo em que se busca uma dinâmica de modo deslizante que atenda os objetivos e requisitos de controle. Estes junto com o estudo da estrutura do sistema servem de base para as escolhas de superfícies cujas dinâmicas de modo deslizante podem ser calculadas pelo método do controle equivalente. A análise dessas dinâmicas revela qual superfície é apropriada para desempenhar a tarefa de controle desejada.

O objetivo de controle a ser cumprido com a síntese da superfície é o rastreamento de trajetórias para o RMRD, por meio da convergência do erro de rastreamento ξ_e a zero. A dinâmica deste erro dada por (4.17) consiste de um sistema multivariável em que o vetor de estado $\xi_e \in \mathbb{R}^3$ deve ser controlado pelo vetor de velocidades $\eta_c \in \mathbb{R}^2$. A velocidade linear v_c influencia apenas a dinâmica de x_e , ao passo que w_c acopla o sistema por atuar sobre todas as suas variáveis de estado. De fato, este é um sistema subatuado, não linear e acoplado.

Lembrando-se que a dimensão da superfície deve ser igual à dimensão do vetor de controle, para cada componente do vetor de controle corresponde uma componente da superfície que, portanto, é definida como:

$$\sigma(\xi_e) = \begin{bmatrix} \sigma_v(\xi_e) \\ \sigma_w(\xi_e) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

em que as componentes $\sigma_v(\xi_e) = 0$, associada a v_c , e $\sigma_w(\xi_e) = 0$, a w_c , devem ser escolhidas, tais que, quando impostas ao sistema (4.17) impliquem em uma dinâmica de modo deslizante que atenda os objetivos de controle.

Estes objetivos e as informações da estrutura do sistema ajudam no processo iterativo para a escolha da superfície. O fato de v_c influenciar apenas em x_e leva a escolha de:

$$\sigma_v(\xi_e) \triangleq \sigma_v(x_e) = k_1 x_e = 0, \quad (4.21)$$

ou seja, uma restrição simples em função de x_e com um ganho escalar k_1 e que quando imposta ao sistema implica que, idealmente, $x_e = 0$.

Observação 4.2 A escolha de $\sigma_v(\xi_e) = k_1 x_e$ (4.21) está de acordo com a Observação 4.1, pois para essa restrição é possível determinar uma lei de controle por modo deslizante que faça com que x_e , respectivamente, decresça ou cresça estritamente de uma condição inicial positiva ou negativa em direção à origem do sistema.

Agora, resta serem tratadas as variáveis de estado y_e e θ_e por meio da escolha de uma superfície $\sigma_w(\xi_e) = 0$. Uma primeira escolha, naturalmente, seria uma soma ponderada por ganhos escalares de y_e e θ_e . Entretanto, após o processo iterativo de escolha de superfície e análise de dinâmica em modo deslizante, optou-se por utilizar uma função senoidal de θ_e , e definiu-se:

$$\sigma_w(\xi_e) \triangleq \sigma_w(y_e, \theta_e) = k_2 y_e + k_3 \sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \quad (4.22)$$

em que k_2 e k_3 são ganhos escalares.

A razão $\frac{\theta_e}{2}$ garante que $\sin(\frac{\theta_e}{2})$ é igual a zero apenas para $\theta_e = 0$, no intervalo considerado $-\pi \leq \theta_e \leq \pi$. A escolha do termo senoidal, $\sin(\frac{\theta_e}{2})$ é adequada à natureza senoidal da dinâmica de erro de rastreamento de trajetória (4.17). Além disso, implica em uma dinâmica de modo deslizante estável e com desempenho ajustável, conforme é formalizado adiante. Por fim, a superfície de deslizamento desenvolvida neste trabalho é dada por:

$$\sigma(\xi_e) = \begin{bmatrix} k_1 x_e \\ k_2 y_e + k_3 \sin(\frac{\theta_e}{2}) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Teorema 4.1 *A dinâmica em modo deslizante resultante da aplicação da superfície (4.23) à dinâmica de erro de rastreamento de trajetória (4.17), é dada por:*

$$\dot{\theta}_e = -\frac{2 k_2 \sin(\theta_e) v_r}{k_3 \cos(\frac{\theta_e}{2})}. \quad (4.24)$$

Prova: Considere o cálculo do controle equivalente:

$$\eta_{eq} = \begin{bmatrix} v_{eq} \\ w_{eq} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

para o sistema (4.17) com a superfície (4.23), conforme a metodologia apresentada no Capítulo 3. Tem-se que η_{eq} é o controle que satisfaz:

$$\dot{\sigma}(\xi_e) = G(\xi_e) \cdot (f(\xi_e, \eta_r) + g(\xi_e) \eta_{eq}) = 0, \quad (4.26)$$

em que o gradiente da superfície é calculado como:

$$G(\xi_e) = \frac{\partial \sigma(\xi_e)}{\partial \xi_e} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \frac{k_3}{2} \cos(\frac{\theta_e}{2}) \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Pode-se, então, equacionar:

$$\dot{\sigma}(\xi_e) = \begin{bmatrix} k_1(w_{eq} y_e + \cos(\theta_e) v_r - v_{eq}) \\ k_2(\sin(\theta_e) v_r - w_{eq} x_e) + \frac{k_3}{2} \cos(\frac{\theta_e}{2})(w_r - w_{eq}) \end{bmatrix} = 0, \quad (4.28)$$

e, assim, determinar:

$$\begin{aligned} v_{eq} &= w_{eq} y_e + \cos(\theta_e) v_r \\ w_{eq} &= \frac{1}{2} \frac{k_3 \cos(\frac{\theta_e}{2}) w_r + 2 k_2 \sin(\theta_e) v_r}{\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e)}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

em que:

$$\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e) = k_2 x_e + \frac{k_3}{2} \cos(\frac{\theta_e}{2}). \quad (4.30)$$

A aplicação do controle equivalente (4.29) ao sistema (4.17) resulta que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= 0 \\ \dot{y}_e &= -w_{eq} x_e + v_r \sin(\theta_e) \\ \dot{\theta}_e &= w_r - w_{eq} \end{aligned} \quad (4.31)$$

que sobre as condições de modo deslizante:

$$\begin{aligned} x_e &= 0 \\ k_2 y_e + k_3 \sin(\frac{\theta_e}{2}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

sofre redução de ordem e se torna um sistema de primeira ordem. Escolhe-se por simplicidade a dinâmica de $\dot{\theta}_e$ em (4.31) para o cálculo da dinâmica de modo deslizante resultante. Desta forma, substituindo-se a expressão de w_{eq} (4.29) na dinâmica de $\dot{\theta}_e$ (4.31) e, aplicando-se as condições de deslizamento (4.32), tem-se a dinâmica de primeira ordem:

$$\dot{\theta}_e = w_r - \frac{1}{2} \frac{k_3 \cos(\frac{\theta_e}{2}) w_r + 2 k_2 \sin(\theta_e) v_r}{\frac{k_3}{2} \cos(\frac{\theta_e}{2})} \quad (4.33)$$

que simplificada resulta em (4.24) e representa a dinâmica do sistema (4.17) em modo deslizante. \square

Teorema 4.2 *Dada a medição de θ_e no intervalo $-\pi \leq \theta_e \leq \pi$ e o ajuste $k_3 > 0$ então: (i) se $v_r > 0$ o sistema (4.24) é assintoticamente estável para $k_2 > 0$; (ii) se $v_r < 0$ o sistema (4.24) é assintoticamente estável para $k_2 < 0$.*

Prova: Considere, para a análise de estabilidade do sistema em modo deslizante (4.24), a função de Lyapunov:

$$V_{md}(\theta_e) = \frac{1}{2} \theta_e^2, \quad (4.34)$$

cujas derivada temporal é dada por:

$$\dot{V}_{md}(\theta_e) = -\frac{2 k_2 \theta_e \sin(\theta_e) v_r}{k_3 \cos(\frac{\theta_e}{2})}. \quad (4.35)$$

Note que $\dot{V}_{md}(\theta_e)$ é sempre negativa se o sinal de k_2 for igual ao sinal de v_r , dado que $-\pi \leq \theta_e \leq \pi$, exceto em $\theta_e = 0$ em que $V_{md}(0) = 0$. \square

Observação 4.3 A partir do resultado do Teorema 4.2 verifica-se que o ajuste do ganho k_1 não influencia na dinâmica de modo deslizante, contudo por comodidade e sem perdas arbitra-se $k_1 > 0$. Adicionalmente, fica evidente que o ajuste do valor da razão $\frac{k_2}{k_3}$ influencia diretamente na convergência da dinâmica de modo deslizamento, que é mais rápida para valores maiores de $\frac{k_2}{k_3}$. Desta forma, o ajuste de k_2 e k_3 deve garantir boa convergência, mas tendo em contrapartida evitar esforços de controle desnecessários e prejudiciais.

Observação 4.4 O fato de $-\pi \leq \theta_e \leq \pi$ implicar que $0 \leq \cos(\frac{\theta_e}{2}) \leq 1$ em adicional ao ajuste de k_2 , descrito no Teorema 4.2 e às Observações 4.1 e 4.2, em que se afirma que x_e é positivo para movimentos para frente e negativo para movimentos para trás, garante que o termo $\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e)$, (4.30), seja não singular. Isto implica que $G(\xi_e)g(\xi_e)$ tem inversa, sendo:

$$G(\xi_e)g(\xi_e) = \begin{bmatrix} -k_1 & k_1 y_e \\ 0 & -\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e) \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Atende-se, desta maneira, a condição de existência da solução de modo deslizante pelo método de controle equivalente, ou seja, que a inversa da matriz $G(\xi_e)g(\xi_e)$ existe, conforme descrito no Capítulo 3.

Observação 4.5 Os valores de $\dot{\theta}_e$ e $\dot{V}_{md}(\theta_e)$ em $\theta_e = \pm\pi$ podem ser determinados por meio da aplicação de limites e da regra de L'Hôpital, resultando que:

$$\lim_{\theta_e \rightarrow \pm\pi} \dot{\theta}_e = \mp \frac{4 k_2}{k_3} v_r. \quad (4.37)$$

$$\lim_{\theta_e \rightarrow \pm\pi} \dot{V}_{md}(\theta_e) = \mp \frac{4 \pi k_2}{k_3} v_r. \quad (4.38)$$

Observação 4.6 *O caso de rotação pura, em que $v_r = 0$, não é atendido pela superfície obtida. Outras escolhas de superfícies estudadas que atendem a esse caso foram descartadas, pois resultaram em dinâmicas de modo deslizante que não atendem ao caso em que o robô deve realizar uma reta, ou seja, em que se tem $w_r = 0$. Por fim, optou-se por não tratar os casos em que $v_r = 0$, pois entende-se que a rotação pura deve ser considerada como redirecionamento do robô.*

Assim, conclui-se que a aplicação da superfície obtida (4.23) permite a construção de controladores cinemáticos por modo deslizante que tornam o robô capaz de realizar trajetórias compostas por movimentos lineares e circulares, atendendo dessa forma os objetivos de controle. Na sequência são estudadas as sínteses desses controladores por meio das técnicas de CMD1, CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting*.

4.3.3 Síntese das Leis de Controle por Modo Deslizante

Esta seção é dedicada à síntese dos controladores cinemáticos por meio das técnicas de CMD1, CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting*. O objetivo dos controladores é forçar as trajetórias da dinâmica de erro de rastreamento (4.19):

$$\dot{\xi}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_c y_e + v_r \cos(\theta_e) - v_c \\ -w_c x_e + v_r \sin(\theta_e) \\ w_r - w_c \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

para a superfície $\sigma(\xi_e)$ (4.23), definida na seção anterior, e, assim, garantir que o modo deslizante (4.24) ocorra. Cumpre-se, dessa maneira, com o objetivo de rastreamento de trajetórias para o RMRD.

Além das sínteses, os resultados de simulação provenientes da aplicação desses controladores a um cenário hipotético, em que o RMRD é representado apenas pelo seu modelo cinemático, são estudados para verificar as características de exatidão dos controladores frente à limitação de amostragem.

4.3.3.1 Controlador Cinemático por Modo Deslizante de Primeira Ordem

O controle cinemático por modo deslizante de primeira ordem tem por objetivo forçar as trajetórias da dinâmica de erro (4.39) para a variedade $\mathcal{P}(\xi_e) = \{\xi_e \in \mathbb{R}^3 : \sigma(\xi_e) = 0\}$, sendo que $\sigma(\xi_e)$ foi definida na Equação (4.23). Utilizando a teoria de CMD1 estudada na Seção 3.2.3, conclui-se que

para atingir este objetivo, um sinal de controle η_c chaveado deve ser sintetizado com base nos sinais das componentes da variável de chaveamento $\sigma(\xi_e)$ multiplicados por um ganho, assim:

$$\eta_c = \begin{bmatrix} v_c \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_v \text{sign}(\sigma_v(x_e)) \\ \rho_w \text{sign}(\sigma_w(y_e, \theta_e)) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

em que ρ_v e ρ_w são ganhos escalares que devem ser ajustados para garantir que as trajetórias do sistema sejam forçadas para a superfície deslizante, $\sigma(\xi_e) = 0$.

Teorema 4.3 *Dado que arbitrou-se por $k_1 > 0$, existem ajustes positivos e suficientemente grandes para os ganhos ρ_v e ρ_w , tal que a lei de controle (4.40) força as trajetórias do sistema (4.17) para a variedade $\mathcal{P}(\xi_e) = \{\xi_e \in \mathbb{R}^3 : \sigma(\xi_e) = 0\}$, e isto o leva ao modo deslizante (4.24).*

Prova: Considere a seguinte função de Lyapunov:

$$V(\sigma(\xi_e)) = \frac{1}{2} \sigma(\xi_e)^T \sigma(\xi_e), \quad (4.41)$$

cuja derivada temporal pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma(\xi_e), \dot{\sigma}(\xi_e)) &= \sigma_v(x_e) (-k_1 v + k_1 \Theta_1(y_e, \theta_e, v_r, w)) + \\ &\quad (y_e, \theta_e) [-\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e) w + \Theta_2(\theta_e, v_r, w_r)], \end{aligned} \quad (4.42)$$

para a qual tem-se que $\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e)$ foi definida na Equação (4.30), como:

$$\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e) = k_2 x_e + \frac{k_3}{2} \cos\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \quad (4.43)$$

e, ainda, que

$$\begin{aligned} \Theta_1(y_e, \theta_e, v_r, w) &= w y_e + v_r \cos(\theta_e) \\ \Theta_2(\theta_e, v_r, w_r) &= k_2 v_r \sin(\theta_e) + \frac{k_3}{2} \cos\left(\frac{\theta_e}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Substituindo (4.40) em (4.42) tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\sigma(\xi_e), \dot{\sigma}(\xi_e)) &= -k_1 \rho_v \sigma_v(x_e) \left(\text{sign}(\sigma_v(x_e)) + \frac{\Theta_1(y_e, \theta_e, v_r, w)}{\rho_v} \right) \\ &\quad - \rho_w \sigma_w(y_e, \theta_e) [\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e) \text{sign}(\sigma_w(y_e, \theta_e)) \\ &\quad + \frac{\Theta_2(\theta_e, v_r, w_r)}{\rho_w}]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Logo tem-se que $\dot{V}(\sigma(\xi_e), \dot{\sigma}(\xi_e)) \leq 0$ para valores suficientemente grandes dos ganhos ρ_v e ρ_w , e desta forma o sistema (4.17) é forçado ao modo deslizante pela lei de controle (4.40).

□

Observação 4.7 O termo $\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e)$ é sempre positivo para o ajuste de k_2 descrito no Teorema 4.2.

Observação 4.8 Mesmo para uma condição inicial para a qual o erro inicial seja grande, existe um ajuste de controle que pode garantir estabilidade, contudo com maior esforço de controle. Apesar disto este tipo situação não tem grande importância na solução do problema de rastreamento de trajetória, posto que implica que em um determinado período de tempo, o RMRD realizaria uma trajetória não definida com esforço máximo para alcançar a trajetória desejada e começar a rastrear-la. Enfatiza-se, ainda, que a limitação dos atuadores implica em limitação do ajuste dos ganhos ρ_v e ρ_w , o que resulta em restrição da região de estabilidade no caso prático.

Para ilustrar os resultados teóricos obtidos em condições em que não ocorre *chattering* pela excitação de dinâmicas não modeladas, considera-se o resultado de simulação em que o RMRD deve realizar uma trajetória circular, sobre a suposição de que sua dinâmica é compensada exatamente e que $\eta_c = \eta$, ou seja, que o comportamento do robô pode ser representado apenas pelo seu modelo cinemático. Com isto, pretende-se realizar o estudo isolado do efeito da limitação da frequência de chaveamento sobre a exatidão do controle, decorrente da limitação de amostragem do sistema.

A trajetória circular é gerada com o uso do modelo cinemático do RMRD de referência (4.13), considerando-se as velocidades referências:

$$v_r = 0,5m/s, \quad w_r = 0,5rad/s \quad (4.46)$$

e a condição inicial da postura de referência:

$$\xi_r(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Em adicional, a condição inicial do robô é escolhida como:

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} -0,7 \\ 0,5 \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

A sintonia dos parâmetros de controle em todos os casos estudados é feita com o objetivo de se obter bom desempenho em simulação garantindo que o sistema em malha fechada seja forçado para o modo deslizante e que trajetórias factíveis sejam rastreadas com erros pequenos. As simulações são realizadas com o uso da ferramenta computacional Simulink (Matlab), em que se opta pela função ODE3 para se obter a resposta temporal em malha fechada, com amostragem de 0, 1 *ms*.

Preferencialmente, deve-se fazer a sintonia dos parâmetros da superfície de deslizamento com o objetivo de ter um bom desempenho em modo deslizante e então escolher os ganhos do controle de chaveamento de maneira a garantir que o sistema seja forçado a este modo. Por fim, ajustes finos podem ser feitos para melhor os resultados.

Conforme verificado no desenvolvimento da superfície de deslizamento (4.23), o ganho k_1 não influencia o modo deslizante e foi arbitrado positivo, assim escolhe-se $k_1 = 1$ por simplicidade. Por outro lado, chegou-se a conclusão que quanto maior o valor da razão $\frac{k_2}{k_3}$ maior a velocidade de convergência das variáveis do sistema em modo deslizante a zero, assim para garantir uma resposta rápida considera-se $k_2 = 10$ e $k_3 = 1$.

Já os ganhos da lei de controle (ρ_v e ρ_w) devem ser escolhidos grandes o suficiente para forçar o modo deslizante, o ideal seria convergir simultaneamente $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ e $\sigma_v(x_e)$ a zero, porém, questões tais como condições iniciais, perturbações e incertezas tornam difícil cumprir esse objetivo. Por consequência disto, opta-se pela estratégia de convergir $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ a zero mais rápido do que $\sigma_v(x_e)$. Em virtude disso, na fase de transição para o modo deslizante, tem-se que na primeira redução de ordem o sistema se torna totalmente atuado, fato que não ocorreria se a escolha inversa fosse feita, posto que impediria a ação de controle direta sobre y_e , como pode ser verificado fazendo $x_e = 0$ na Equação (4.39) e, ainda, implicaria em oscilações e maior tempo de convergência. Assim, após alguns testes de simulação, escolheu-se $\rho_v = 0,7$ e $\rho_w = 2$ para o cenário estudado.

Os resultados obtidos em simulação são mostrados pelos gráficos dos sinais de erro de rastreamento de trajetória, vistos nas Figuras 4.4 e 4.5, e pelo gráfico dos sinais das variáveis de chaveamento $\sigma_v(x_e)$ e $\sigma_w(y_e, \theta_e)$, mostrados na Figura 4.6, que tendem a zero em tempo finito, assim como x_e , θ_e e y_e .

Uma ampliação dos sinais das variáveis de chaveamento é representada na Figura 4.7, em que se pode observar boa exatidão de convergência em modo deslizante com um erro máximo de aproximadamente 7×10^{-5} , dadas as condições em que foram feitas as simulações.

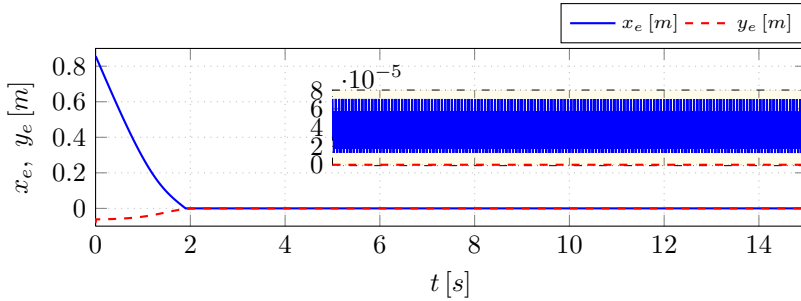


Figura 4.4 – Sinais dos erros x_e e y_e sob controle por modo deslizante de primeira ordem.

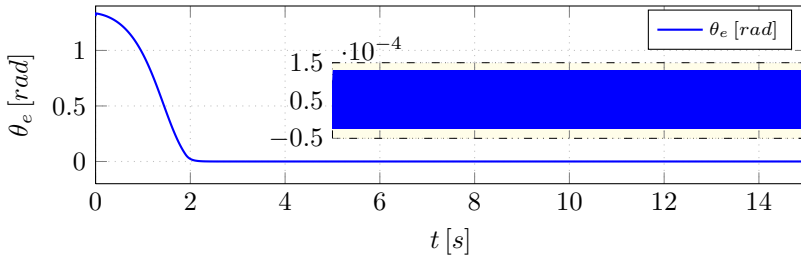


Figura 4.5 – Sinal do erro θ_e sob controle por modo deslizante de primeira ordem.

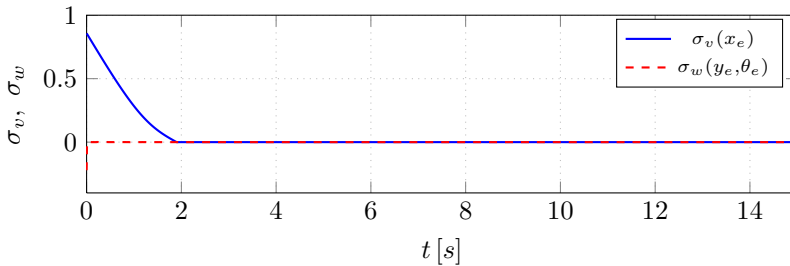


Figura 4.6 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob controle por modo deslizante de primeira ordem.

Os sinais de controle v_c e w_c neste caso são descontínuos, chaveando em alta frequência a cerca de 5kHz, e são mostrados nas Figuras 4.8 e 4.9.

Como será visto a seguir, a utilização das duas outras técnicas de CMD estudadas geram sinais de controle contínuos, cuja principal vantagem é a redução de *chattering* em caso de dinâmicas negligenciadas, conforme será

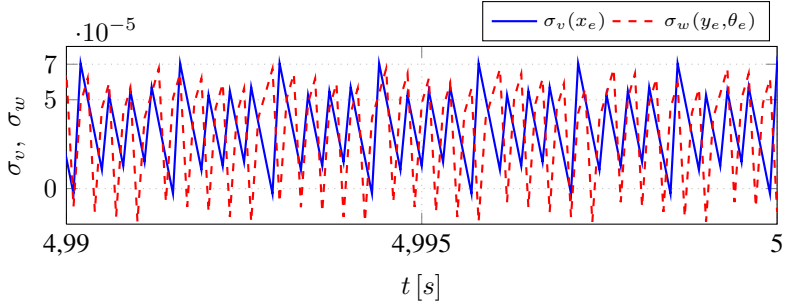


Figura 4.7 – Ampliação dos sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob controle por modo deslizante de primeira ordem.

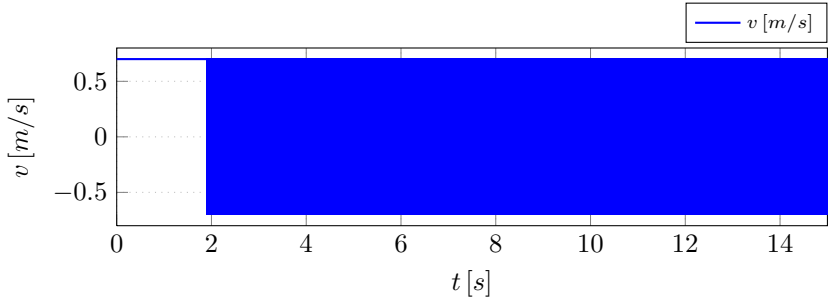


Figura 4.8 – Sinal de controle v .

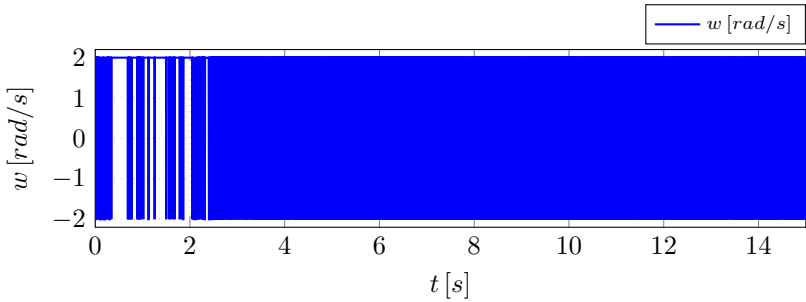


Figura 4.9 – Sinal de controle w .

verificado no próximo capítulo.

Por fim, conclui-se dos resultados de simulação que o funcionamento do controle cinemático com o CMD1 apresenta bom desempenho que se tem

condições ideais.

4.3.3.2 Controle Cinemático por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite

O controle com camada limite é uma adaptação do controle por modo deslizante de primeira ordem, em que se substitui a função sinal na lei de controle (4.40) por uma aproximação que elimina a descontinuidade. Esta ação tem como resultado uma região linear de controle em torno de $\sigma(\xi_e) = 0$, conforme visto no Capítulo (3). Assim o objetivo de controle segue o mesmo paradigma do CMD1 visto na seção anterior.

Logo, seguindo a teoria apresentada no Capítulo 3, a lei de CMD1 com camada limite, que substitui o controle (4.40), é definida como:

$$\eta_c = \begin{bmatrix} v_c \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_v \frac{\sigma_v(x_e)}{\|\sigma_v(x_e)\| + \epsilon_1} \\ \rho_w \frac{\sigma_w(y_e, \theta_e)}{\|\sigma_w(y_e, \theta_e)\| + \epsilon_2} \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

em que ϵ_1 e ϵ_2 são constantes escalares positivas. A aplicação desta lei controle força o sistema para uma região ou camada limite em torno de $\sigma(\xi_e) = 0$ de tamanho proporcional a ϵ_1 e ϵ_2 .

O controle (4.49), diferentemente do controle (4.40), produz um sinal de controle contínuo. O ajuste dos parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 regula a relação de proporcionalidade inversa entre redução dos efeitos de *chattering* e robustez.

Para ilustrar o funcionamento desta técnica considere o mesmo cenário exposto na seção anterior, em que agora um reajuste dos ganhos do controlador é necessário para garantir convergência ao modo deslizante, posto que o sinal de controle é diferente do CMD1 para valores próximos da camada limite. Assim, após algumas simulações chegou-se no seguinte ajuste com $\rho_v = 2$, $\rho_w = 5$ e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,01$.

Em simulação, foram obtidos como resultados os sinais de erros de rastreamento de postura representados nas Figuras 4.10 e 4.11. Os Gráficos dos sinais da variável de chaveamento $\sigma(\xi_e)$ são mostrados na Figura 4.12. Já na Figura 4.13, é mostrada uma ampliação destes sinais, que permite verificar boa exatidão de convergência ao modo deslizante, com erro máximo de aproximadamente $3,5 \times 10^{-3}$.

Os sinais de controle resultantes dessa aplicação são contínuos e convergem para os valores de referência ($v_r = 0.5m/s$ e $w_r = 0.5rad/s$), como pode ser observado nas Figuras 4.14 e 4.15.

A diminuição dos valores dos parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 pode ser utilizada para melhorar a exatidão do modo deslizante, cujo limite é a exatidão atingida

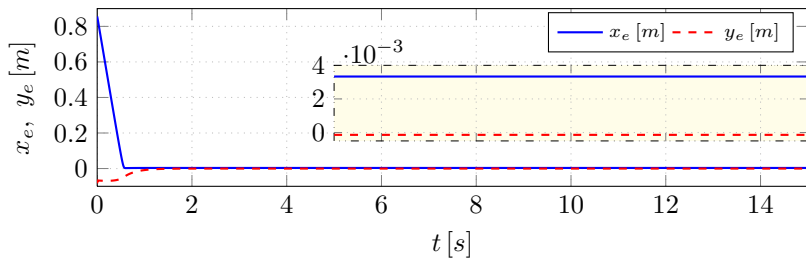


Figura 4.10 – Sinais dos erros x_e e y_e sob CMD1 com camada limite.

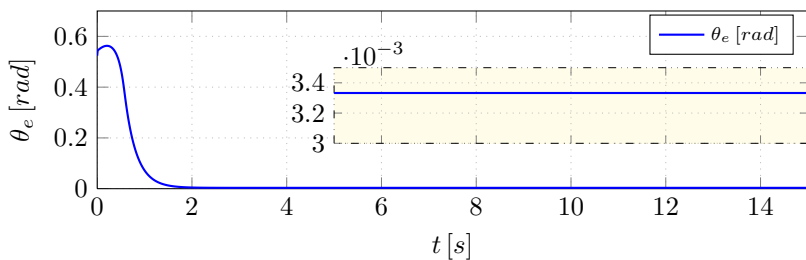


Figura 4.11 – Sinal do erro θ_e sob CMD1 com camada limite.

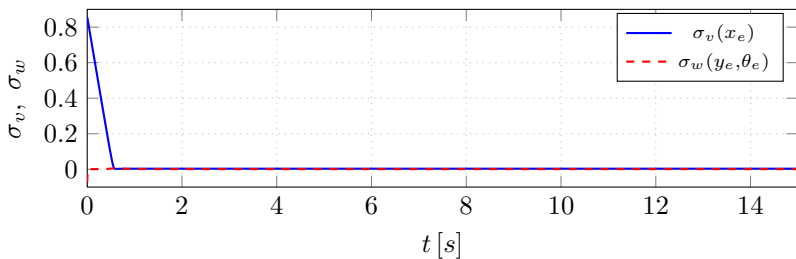


Figura 4.12 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob CMD1 com camada limite.

pelo CMD1 sem camada limite. Quando ϵ_1 e ϵ_2 tendem a zero a camada limite tende à superfície. Contudo, isto torna o sistema mais vulnerável a efeitos de *chattering*.

O fato de gerar leis de controle contínuas provê a essa técnica a capacidade de contornar eventuais problemas de *chattering*. Essa propriedade é verificada, também, para o controlador de cinemática por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting* estudado na sequência.

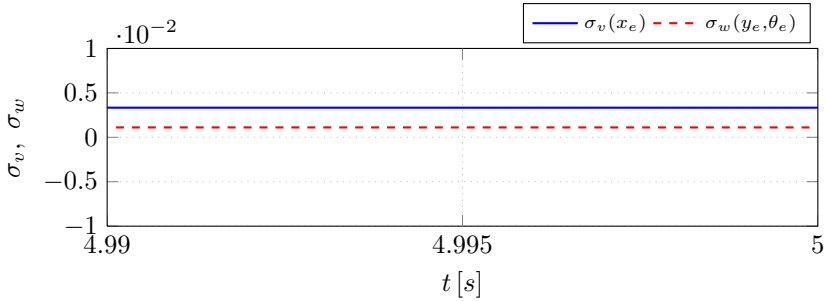


Figura 4.13 – Ampliação dos sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob CMD1 com camada limite.

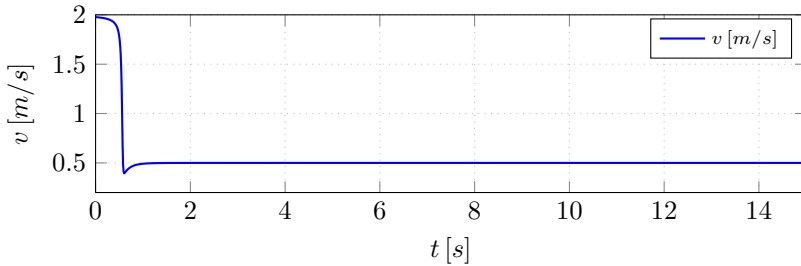


Figura 4.14 – Sinal de controle v com camada limite.

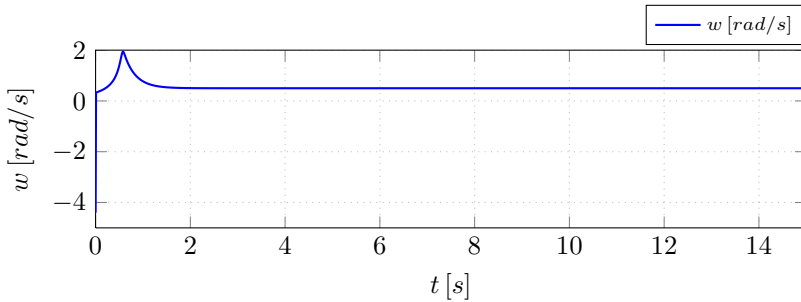


Figura 4.15 – Sinal de controle w com camada limite.

4.3.4 Controle Cinemático por Modo Deslizante de Segunda Ordem Super-Twisting

Esta seção trata a síntese do controle cinemático por CMD2 *super-twisting* em que o objetivo é forçar por meio de um sinal de controle contínuo

o sistema (4.17) ao modo deslizante de segunda ordem, confinando suas trajetórias na variedade:

$$\mathcal{S}(\xi_e) = \{\xi_e \in \mathbb{R}^3 : \sigma(\xi_e) = \dot{\sigma}(\xi_e) = 0\}, \quad (4.50)$$

lembrando que $\sigma(\xi_e)$ foi definido na Equação (4.23). Assim, garante-se ao sistema em malha fechada melhor exatidão de controle, implicando em maior robustez frente aos fatores que geram *chattering*, perturbações e incertezas.

O controle é definido com base na construção de dois sistemas auxiliares, um para cada componente da superfície $\sigma(\xi_e)$, conforme a teoria descrita no Capítulo 3. Considerando a dinâmica de erro (4.39), os novos sistemas são calculados por meio da definição das seguintes variáveis auxiliares:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sigma_v(x_e) \\ y_2 &= \dot{\sigma}_v(x_e) \\ z_1 &= \sigma_w(y_e, \theta_e) \\ z_2 &= \dot{\sigma}_w(y_e, \theta_e). \end{aligned} \quad (4.51)$$

O cálculo do primeiro sistema auxiliar resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \mathcal{F}_v(x_e, y_e, \theta_e, v_r, \dot{v}_r, w_r, w_c, \dot{w}_c) - \mathcal{G}_v \dot{v}_c, \end{aligned} \quad (4.52)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_v(\cdot) &= k_1 \dot{w}_c y_e - k_1 w_c^2 x_e - k_1 \sin(\theta_e) v_r w_r \\ &\quad + 2k_1 \sin(\theta_e) v_r w + k_1 \cos(\theta_e) \dot{v}_r \\ \mathcal{G}_v &= k_1, \end{aligned} \quad (4.53)$$

e o segundo sistema auxiliar é calculado como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \mathcal{F}_w(y_e, \theta_e, v_r, \dot{v}_r, w_r, \dot{w}_r, v_c, w_c) - \mathcal{G}_w(x_e, \theta_e) \dot{w}_c, \end{aligned} \quad (4.54)$$

em que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_w(\cdot) &= -k_2 (w_c^2 y_e + v_r \cos(\theta_e) (2w - w_r) - v_c w_c - \sin(\theta_e) \dot{v}_r) \\ &\quad - \frac{k_3}{4} \left(\sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) (w_r - w_c)^2 - 2 \cos\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \dot{w}_r \right) \\ \mathcal{G}_w(x_e, \theta_e) &= k_2 x_e + \frac{k_3}{2} \cos(\theta_e). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Dado que é possível escrever os seguintes limites para os sistemas auxiliares (4.52) e (4.54):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_v(\cdot)\| &\leq C_v \\ \|\mathcal{F}_w(\cdot)\| &\leq C_w \\ 0 < \Psi_m &\leq \|\mathcal{G}_w(\cdot)\| \leq \Psi_M \\ \|\mathcal{G}_v(\cdot)\| &= k_1 > 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

pode-se garantir a convergência a zero em tempo finito para esses sistemas, por meio da aplicação das leis de controle:

$$\begin{aligned} v_c &= v_1 + v_2 \\ v_1 &= a_v \sqrt{\|y_1\|} \text{sign}(y_1) \\ \dot{v}_2 &= b_v \text{sign}(y_1), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} w_c &= w_1 + w_2 \\ w_1 &= a_w \sqrt{\|z_1\|} \text{sign}(z_1) \\ \dot{w}_2 &= b_w \text{sign}(z_1), \end{aligned} \quad (4.58)$$

cujos ganhos devem ser ajustados tais que:

$$\begin{aligned} a_v^2 &\geq \frac{4C_v}{k_1^2} \frac{(b_v + C_v)}{(b_v - C_v)} \\ b_v &\geq \frac{C_v}{k_1} \\ a_w^2 &\geq \frac{4C_w}{\Psi_m^2} \frac{\Psi_M(b_w + C_w)}{\Psi_m(b_w - C_w)} \\ b_w &\geq \frac{C_w}{\Psi_m}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

conforme formulado no Capítulo 3.

Observação 4.9 As condições descritas pela Equação (4.56) são razoáveis, posto que as limitações de atuação e as condições de factibilidade delimitam as condições iniciais e as trajetórias. Os limites assumidos para o termo $\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e)$ (4.56) são válidos sob o ponto de vista das Observações 4.4 e 4.7, que enunciam que o termo $\mathcal{G}_w(x_e, \theta_e)$ é sempre positivo para o ajuste de k_2 descrito no Teorema 4.2.

Considerando o cenário de simulação descrito anteriormente, em que o RMRD deve fazer uma trajetória circular, resultados de simulação foram obtidos utilizando o controle *super-twisting*, para comparação com os resultados obtidos com os outros controladores, verificando a exatidão dos modos deslizantes.

Para o ajusto deste controle deve-se sintonizar os ganhos a_v e a_w com valores maiores, pois os termos relativos a eles nas leis de controle (4.57) e (4.58) são responsáveis por gerar a maior parte do esforço de controle e assim os termos relacionados aos ganhos b_v e b_w configuram como ajuste fino e agregam mais robustez a malha. Como consequência, estes últimos

ganhos devem ser sintonizados com valores menores. Além disso, é interessante convergir mais rápido $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ que $\sigma_v(x_e)$ conforme já foi discutido anteriormente.

Feitas essas considerações sobre o ajuste do controle e visando bom desempenho em simulação os ganhos foram sintonizados como:

$$\begin{aligned} a_v &= 1, \quad b_v = 0, 2 \\ a_w &= 1, 5, \quad b_w = 0, 6. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Já os parâmetros da variável de chaveamento $k_1 = 1$ e $k_2 = 10$ foram mantidos, contudo considerou-se o reajuste de $k_3 = 4$. O aumento no valor de k_3 é devido a ele ter influencia direta na ação de controle sobre o subsistema (4.54). Todas as outras configurações foram mantidas.

Analizando-se os resultados de simulação dos sinais de erro apresentados nas Figuras 4.16 e 4.17, pode-se verificar que o controle cinemático com CMD2 *super-twisting* oferece ao sistema um bom tempo de resposta e uma boa exatidão de convergência.

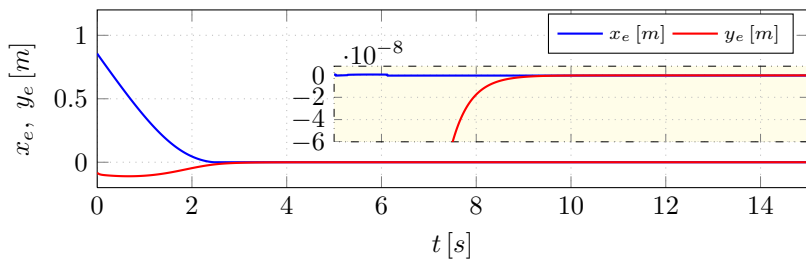


Figura 4.16 – Sinais dos erros x_e e y_e sob CMD2 *super-twisting*.

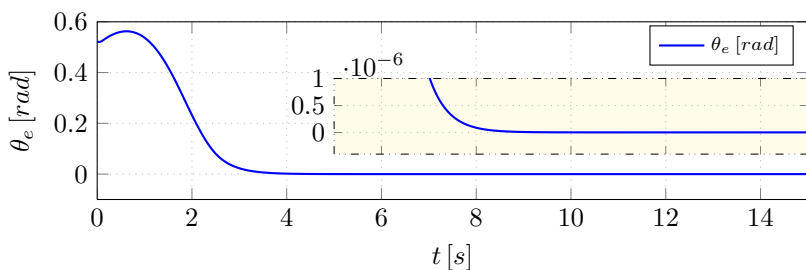


Figura 4.17 – Sinal de erro θ_e sob CMD2 *super-twisting*.

Nota-se que o sinal da variável de deslizamento, mostrado na Figura 4.18, converge em tempo finito. Uma ampliação nesses sinais (ver Figura

4.19) mostra que a convergência ocorre com exatidão superior a dos outros controladores apresentados anteriormente, com erro máximo de aproximadamente 9×10^{-9} .

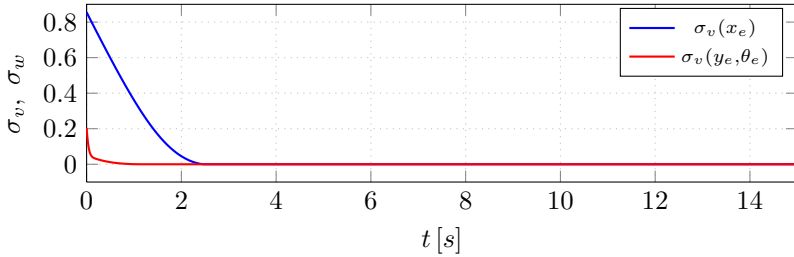


Figura 4.18 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob CMD2 *super-twisting*.

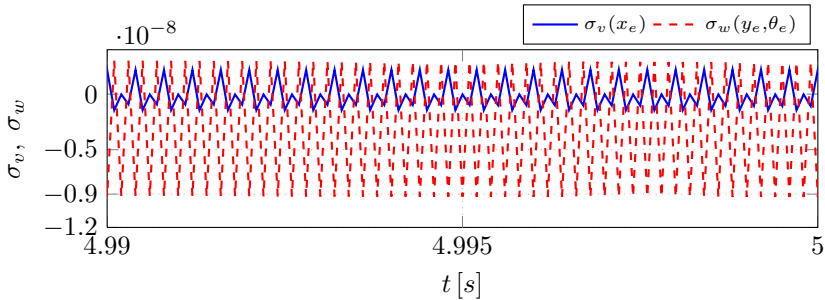


Figura 4.19 – Ampliação dos sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob CMD2 *super-twisting*.

Os sinais de controle resultantes dessa aplicação são representados na Figura 4.20 (controle v_c) e na Figura 4.21 (controle w_c) e como esperado são contínuos.

Os resultados obtidos com a aplicação dos controladores sintetizados comprovam que o CMD2 *super-twisting* oferece melhor exatidão de convergência ao modo deslizante frente à limitação de chaveamento em relação aos outros controladores. Lembrando que o *super-twisting* apresentou valor aproximado de 9×10^{-9} , o CMD1 apresentou 7×10^{-5} e o CMD1 com camada limite $3,5 \times 10^{-3}$.

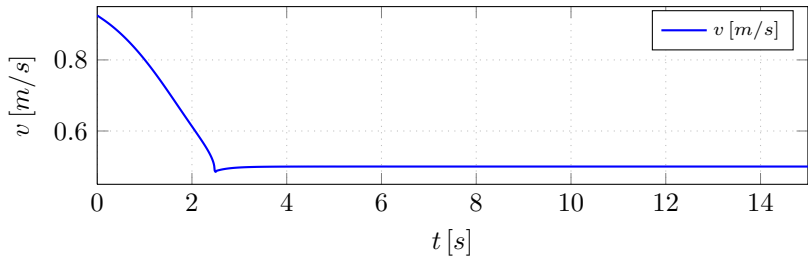


Figura 4.20 – Sinal de controle *super-twisting* v .

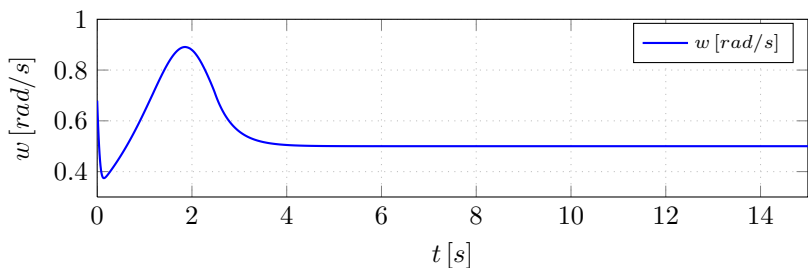


Figura 4.21 – Sinal de controle *super-twisting* w .

4.4 Considerações Finais

Ao longo deste capítulo, o problema de controle de rastreamento de trajetória para um robô móvel sobre rodas diferencial foi delimitado e formulado, e a proposta de controle robusto para resolver esse problema foi desenvolvida. Essa consiste de um controle composto por um controlador dinâmico em cascata com um controlador cinemático. O primeiro é composto de um controle de dinâmica inversa, para compensar as forças conhecidas que atuam sobre o sistema, e de um controle PD. O ajuste do PD visa garantir o rastreamento da referência de velocidade com tempo de resposta suficientemente rápido para permitir a aplicação do controle cinemático na malha externa e contribuir na robustez frente à existência de dinâmicas não modeladas. O segundo, trata-se do controle cinemático desenvolvido com base na estratégia de que o RMRD segue um robô idêntico de referência fictício e na técnica de controle por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting*, cujo papel é gerar sinais de controle em velocidade contínuos para cumprir com o objetivo de rastreamento robusto de trajetórias frente a incertezas paramétricas, perturbações externas, limitações de amostragem e presença de dinâmicas ne-

gligenciadas. A principal contribuição no desenvolvido deste controle foram as restrições construídas para lidar com a subatuação do sistema permitindo o rastreamento robusto de trajetórias.

Foram, também, mostrados os projetos de um controlador dinâmico composto por um controle de dinâmica inversa com controle proporcional, e de dois controladores cinemáticos, um com base na técnica de CMD1 e outro na CMD1 com camada limite. Alguns resultados de simulação são apresentados visando ilustrar o funcionamento das técnicas de controle cinemático e evidenciar a propriedade de que o CMD2 *super-twisting* tem melhor exatidão no modo de deslizamento do que o CMD1, frente à limitação da frequência de chaveamento do sinal de controle. Resultados e análises mais aprofundadas do desempenho dos controladores são mostrados no Capítulo 5.

Capítulo 5

Resultados

Sumário

| | | |
|------------|--|------------|
| 5.1 | Controle de Rastreamento de Trajetórias | 92 |
| 5.2 | Modelos | 95 |
| 5.3 | Controladores | 98 |
| 5.4 | Trajetórias | 100 |
| 5.5 | Cenário Ideal | 102 |
| 5.5.1 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem | 103 |
| 5.5.2 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite | 106 |
| 5.5.3 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Segunda Ordem <i>Super-Twisting</i> | 109 |
| 5.5.4 | Comentários | 112 |
| 5.6 | Cenário Realístico | 113 |
| 5.6.1 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem | 115 |
| 5.6.2 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite | 118 |
| 5.6.3 | Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Segunda Ordem <i>Super-Twisting</i> | 124 |
| 5.6.4 | Comentários | 130 |
| 5.7 | Estudo Experimental com o Powerbot | 131 |
| 5.7.1 | Resultados de Simulação | 133 |
| 5.7.2 | Resultados Experimentais | 139 |
| 5.8 | Considerações Finais | 145 |

Neste capítulo, são realizadas análises comparativas dos controladores desenvolvidos no Capítulo 4 por meio de resultados de simulações e de experimentos com o robô Powerbot. As simulações são desenvolvidas sobre dois cenários: (i) um ideal, em que se supõe que o sistema é bem conhecido e representado pelo modelo de postura do RMRD, e está sujeito a perturbações de carga; (ii) e outro realístico, em que se emprega o modelo de configuração do robô em busca de reproduzir com maiores detalhes seu funcionamento, englobando os comportamentos e limitações de seus atuadores, suas limitações de amostragem, incertezas paramétricas e perturbações de carga.

Os estudos têm como objetivo evidenciar as contribuições oferecidas pelo controle em cascata proposto, relacionadas a sua robustez frente a incertezas paramétricas, perturbações externas, dinâmicas não modeladas e limitações físicas do sistema de atuação e amostragem.

5.1 Controle por Modo Deslizante para o Rastreamento de Trajetória para um Robô Móvel sobre Rodas Diferencial

O desenvolvimento de um controle de rastreamento robusto de trajetórias para o robô móvel sobre rodas diferencial é abordado neste trabalho. Este enquadra-se na classe de sistemas não lineares, não holonômicos e subatuados. Tal desenvolvimento é parte integrante dos requisitos para realizar a navegação autônoma de um robô, que depende, também, do acesso às informações do robô e ambiente, da geração de trajetórias e de um sistema de navegação para gerenciar suas funções. Esses requisitos são supostos disponíveis.

Uma estrutura de controle em cascata foi proposta para realizar o rastreamento robusto de trajetórias frente a incertezas paramétricas, perturbações de carga, dinâmicas negligenciadas, limitações de atuação e de amostragem. Essa estrutura, conforme detalhado no Capítulo 4, é composta por um controlador dinâmico em cascata com um controlador cinemático como mostrado na Figura 5.1. O controlador dinâmico foi sintetizado com a combinação da técnica de controle de dinâmica inversa e da técnica de controle PD para compensar as forças e torques conhecidos que atuam sobre o sistema e garantir o rastreamento de referências de velocidades. O controlador cinemático foi projetado por meio da técnica de CMD2 *super-twisting* com o propósito de gerar sinais de controle em velocidade, que servem de referência para o controlador dinâmico, e garantir que o RMRD realize o rastreamento robusto das

trajetórias descritas pelas suas coordenadas de postura.

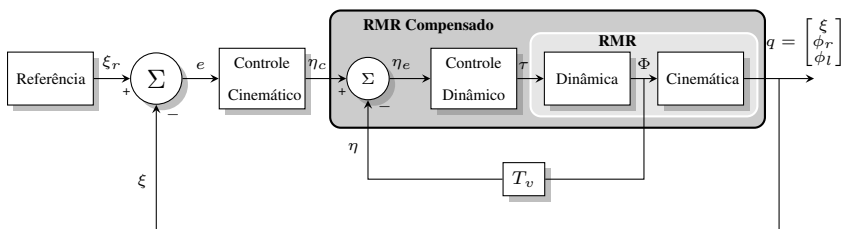


Figura 5.1 – Estrutura de controle em cascata para um RMR.

A combinação das propriedades das técnicas de controle PD e CMD2 *super-twisting*, além de gozar da robustez inerente às técnicas de CMD frente a perturbações externas e incertezas paramétricas, oferece robustez frente a limitações de amostragem e dinâmicas não modeladas, que são os principais fatores que causam *chattering*. Este fenômeno consiste em oscilações com frequência e amplitude limitadas que se propagam pelas variáveis de estado do sistema e comprometem os objetivos de controle. O ajuste do PD permite atenuar os efeitos das dinâmicas não modeladas, acelerando a resposta da malha interna do sistema. Assim, auxilia no desempenho do CMD2 *super-twisting* na malha externa de controle, cuja concepção implica em melhor robustez frente a fatores que causam o *chattering* quando comparado ao CMD1.

Resultados de simulação e experimentais são usados para verificar a propriedade de robustez da estrutura de controle proposta. Isto é feito por meio da realização de comparações com diferentes estruturas de controle, descritas a seguir, observando os erros de rastreamento e de convergência em modo deslizante. Três cenários de simulação serão estudados:

- O primeiro cenário denominado ideal é construído para avaliar o desempenho do controle de rastreamento de trajetórias considerando que o comportamento do RMRD é perfeitamente representado pelo seu modelo de postura em que supõe-se que é sujeito, apenas, à perturbação externa de carga e, portanto, são desconsideradas incertezas paramétricas e estruturais, assim como limitações de atuação e amostragem. Neste cenário, três estruturas de controle são estudadas, cada uma composta pelo controlador de dinâmica inversa com ação proporcional e por um dos controladores cinemáticos projetados com as técnicas de CMD1, CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting*. Pretende-se, assim, dar ênfase ao estudo do desempenho dos controladores cine-

máticos.

- O segundo cenário, denominado realístico, visa avaliar o desempenho do controle de rastreamento de trajetórias usando o modelo de configuração do robô para representar seu comportamento e considerando as limitações de amostragem e atuação, as perturbações externas de carga, incertezas paramétricas e estruturais (dinâmica dos atuadores). Este cenário reúne maiores detalhes do comportamento do RMRD, dentre os quais, alguns podem causar *chattering* e degradar o desempenho do sistema em malha fechada. Os estudos são realizados com a comparação dos resultados da aplicação de três estruturas de controle: a primeira composta pelo controlador de dinâmica inversa com PD e pelo controlador cinemático por modo deslizante de primeira ordem; a segunda diferencia-se da primeira pelo uso do controlador cinemático por modo deslizante de primeira ordem com camada limite e a terceira consiste na estrutura de controle proposta.
- O terceiro cenário, apresentado junto com estudos experimentais, considera a mesma modelagem, incertezas, perturbações e limitações descritas para o cenário realístico. Entretanto, esse novo cenário é adequado à estrutura de controle do Powerbot, que possui um controle interno PD para rastrear referências de velocidades. Portanto, a estrutura de controle que se pode estudar é composta por esse controlador dinâmico PD, sem compensação de forças e torques, e por um controlador cinemático. Serão comparados os desempenhos de duas estruturas de controle, uma com o controlador cinemático por modo deslizante de primeira ordem com camada limite e a outra com o controlador cinemático por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting*.

Como será visto adiante, os resultados obtidos com o terceiro cenário serviram de premissa para a realização dos experimentos com o Powerbot, cujos dados foram utilizados nas simulações. Foram obtidos resultados experimentais para as mesmas estruturas de controle empregadas no terceiro cenário, em que o controlador cinemático que emprega a técnica de CMD1 não foi usado, por ser susceptível aos efeitos de *chattering*.

Na sequência, os modelos e parâmetros do robô, os controladores e trajetórias envolvidos nos estudos de simulação e experimentais são listados sucintamente, para então, serem apresentados os resultados e análises. O estudo do cenário ideal é mostrado na Seção 5.5, em seguida estuda-se o cenário realístico na Seção 5.6. Os estudos do terceiro cenário e resultados experimentais são mostrados na Seção 5.7. Na Seção 5.8 são apresentados comentários finais e uma tabela que sintetiza os resultados obtidos.

5.2 Modelos

Os modelos de configuração e de postura em espaço de estado do RMRD foram detalhados no Capítulo 2 e são apresentados resumidamente nesta seção. Adicionalmente, são listados os parâmetros nominais do robô, com base nas informações do Powerbot.

O modelo de configuração é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\Phi} \\ L_a \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(\theta)\Phi \\ \bar{M}^{-1} \left(n_w k_\tau \bar{B} i_a - \bar{\tau}_p - \bar{C}(\dot{\theta}) \right) \\ u_a - R_a i_a - n_w k_b \Phi \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

em que na primeira linha está representado o comportamento cinemático do robô; na segunda linha, o comportamento dinâmico; e, na última, o comportamento do circuito elétrico dos motores. Esse modelo envolve as variáveis de configuração q , as velocidades angulares das rodas Φ , as correntes de armadura i_a e as entradas de controle em tensões de armadura u_a , definidas como:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi_r \\ \phi_l \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_r \\ \dot{\phi}_l \end{bmatrix}, \quad i_a = \begin{bmatrix} i_{a_r} \\ i_{a_e} \end{bmatrix}, \quad u_a = \begin{bmatrix} u_{a_r} \\ u_{a_e} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

As variáveis x e y dão a localização do robô, θ sua orientação, ao passo que ϕ_r e ϕ_l representam os deslocamentos angulares das rodas direita e esquerda, respectivamente, cujas velocidades são representadas por $\dot{\phi}_r$ e $\dot{\phi}_l$. Além disso, têm-se a matriz jacobiana $S(\theta)$, a matriz de inércia $\bar{M}(\xi)$, a matriz de Coriolis $\bar{C}(\xi, \xi)$ e a matriz de entrada \bar{B} dadas por:

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos(\theta) & \frac{r}{2} \cos(\theta) \\ \frac{r}{2} \sin(\theta) & \frac{r}{2} \sin(\theta) \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \bar{M}(\xi) &= \begin{bmatrix} f_3 & f_5 \\ f_5 & f_4 \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}, \\ \bar{C}(\xi, \xi) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{d m_e r^2 \cos(\alpha)}{2b} \dot{\theta} \\ -\frac{d m_e r^2 \cos(\alpha)}{2b} \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3)$$

sendo:

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{r^2 I + (b^2 m - 2 \operatorname{sen}(\alpha) b d m_c) r^2 + 4 b^2 I r_\phi}{4 b^2} \\ f_4 &= -\frac{r^2 I - b^2 m r^2}{4 b^2} \\ f_5 &= \frac{r^2 I + (2 \operatorname{sen}(\alpha) b d m_c + b^2 m) r^2 + 4 b^2 I r_{phi}}{4 b^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Por fim, tem-se o vector $\bar{\tau}_p$ que pode ser empregado para representar perturbações externas, incertezas paramétricas e estruturais.

O modelo de postura do RMRD, o qual serviu de base para a síntese dos controladores, é descrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pos}(\theta) \eta \\ \bar{M}_{pos}^{-1} \left(\bar{B}_{pos} \tau + \bar{\tau}_p - \bar{C}_{pos}(\dot{\xi}) \eta \right) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

em que se tem na primeira linha o modelo cinemático e na segunda o modelo dinâmico do RMRD. Nestes modelos, são empregadas as coordenadas de postura do robô ξ , o vetor de velocidade η e o vetor de controle de torques nas rodas τ , dados por:

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \tau = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

em que v representa a velocidade linear do robô e w a angular e τ_r e τ_l representam torques nas rodas direita e esquerda, respectivamente. Ademais, tem-se que as matrizes de inércia, Coriolis, de entrada de torques das rodas e matriz $S_{pos}(\xi)$ são definidas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{pos}(\xi) &= \begin{bmatrix} m_{nom} & 0 \\ 0 & I_{nom} \end{bmatrix}, \bar{B}_{pos} = \begin{bmatrix} \frac{r_{nom}}{2} & \frac{r_{nom}}{2} \\ \frac{r_{nom}}{2 b_{nom}} & -\frac{r_{nom}}{2 b_{nom}} \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_{pos}(\dot{\xi}) &= \begin{bmatrix} 0 & -d_{nom} m_{nom} \dot{\theta} \\ d_{nom} m_{nom} \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}, S_{pos}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Os parâmetros denominados nominais do robô são diferenciados com um acento circunflexo e foram reunidas a partir das informações fornecidas

Tabela 5.1 – Parâmetros nominais do Powerbot, fornecidos pelo fabricante.

| Parâmetro | Valor |
|---------------|---------|
| m_{nom} | 120 kg |
| c_{nom} | 0,90 m |
| $2b_{nom}$ | 0,66 m |
| h_{nom} | 0,48 m |
| $n_{w_{nom}}$ | 22,3 |
| r_{nom} | 0,135 m |

pelo fabricante do Powerbot e também por meio de medições e estimações. Os parâmetros fornecidos pelo fabricante são listados na Tabela 5.1.

Já os parâmetros medidos são listados na Tabela 5.2, ao passo que os parâmetros estimados por meio de aproximações e cálculos são listados na Tabela 5.3.

Tabela 5.2 – Parâmetros medidos no Powerbot.

| Parâmetro | Valor |
|---------------|------------|
| d_{nom} | 0,1 m |
| $R_{a_{nom}}$ | 6 Ω |

Esses parâmetros nominais são explicitamente utilizados no modelo de postura, no qual assume-se que o robô é conhecido. O uso desses parâmetros no modelo de configuração, entretanto, é feito considerando-se que há uma incerteza de $\pm 10\%$ em seus valores.

Os valores máximos de atuação e carga suportada pelo Powerbot, fornecidos pelo fabricante, são listados na Tabela 5.4, com a exceção da corrente máxima de armadura que foi estimada e do período de amostragem da malha externa de controle. Esse período foi definido pelo desempenho dos progra-

Tabela 5.3 – Parâmetros estimados para o Powerbot.

| Parâmetro | Valor |
|----------------------|---------------------------|
| $m_{r_{nom}}$ | 110 kg |
| $m_{c_{nom}}$ | 5 kg |
| I_{nom} | 15,0656 kg.m ² |
| $I_{c_{nom}}$ | 11,4180 kg.m ² |
| $I_{r_{nom}}$ | 0,7293 kg.m ² |
| $I_{r_{\phi_{nom}}}$ | 0,0456 kg.m ² |
| α_{nom} | 0 |
| $L_{a_{nom}}$ | 0,010 H |
| $k_{b_{nom}}$ | 0,02 rad/s/V |
| $k_{\tau_{nom}}$ | 0,2247 N.m/A |

Tabela 5.4 – Valores máximos de variáveis do Powerbot.

| Parâmetro | Valor |
|--|---|
| velocidade transversal | $2,1\text{ m/s}$ |
| velocidade rotacional | $\frac{5\pi}{3}\text{ rad/s} \cong 5,24\text{ rad/s}$ |
| torque de saída do motor | $20,45\text{ N.m}$ |
| tensão no motor | 24 VDC |
| corrente no motor | 4 A |
| carga | 100 kg |
| período de amostragem da malha interna | 5 ms |
| período de amostragem da malha externa | 15 ms |

mas¹ cujos desenvolvimentos foram necessários para realizar o controle em tempo real do Powerbot.

Na sequência, são apresentados, sucintamente, os controladores propostos no Capítulo 4.

5.3 Controladores

As sínteses dos controladores desenvolvidos nesse trabalho foram detalhadas no Capítulo 4. Esses controladores são enumerados a seguir de forma resumida.

Foram desenvolvidos dois controladores dinâmicos: o primeiro composto de um controle de dinâmica inversa com ação proporcional, para fins de comparação; e o segundo de um controle de dinâmica inversa com ação proporcional derivativa em paralelo, parte da proposta de controle. O controle de dinâmica inversa é dado por

$$\tau_c = \bar{B}_{pos}(\xi)^{-1} \left(\bar{C}_{pos}(\dot{\theta})\eta + \bar{M}_{pos}\bar{u} \right) \quad (5.8)$$

e sua ação compensa as dinâmicas conhecidas do sistema, resultando em um sistema linear cuja saída é o vetor de velocidade η a ser controlada pelo vetor de entrada:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{u}_l \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

tal que, o erro $\eta_e = \eta_c - \eta$ convirja para zero. No primeiro caso, adota-se uma ação proporcional com:

$$\bar{u} = \dot{\eta}_c + K_p \eta_e. \quad (5.10)$$

¹Programas computacionais para aplicação do controle em tempo real ao Powerbot foram desenvolvidos pelo grupo de pesquisa de robótica do Departamento de Automação e Sistemas da UFSC.

Já no segundo caso, opta-se pela ação de controle PD, em que os sinais de controle \bar{u}_r e \bar{u}_l são gerados, respectivamente, pelos controladores:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_v(s) &= \frac{v_e(s)}{\bar{u}_v(s)} = k_{p_v} + \frac{k_{d_v} N_v}{1 + \frac{N_v}{s}} \\ \mathcal{C}_w(s) &= \frac{w_e(s)}{\bar{u}_w(s)} = k_{p_w} + \frac{k_{d_w} N_w}{1 + \frac{N_w}{s}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Três controladores cinemáticos foram sintetizados com base nas técnicas de CMD1, CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting*. Dada a dinâmica de erro de rastreamento de trajetórias:

$$\dot{\xi}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_c y_e + v_r \cos(\theta_e) - v_c \\ -w_c x_e + v_r \sin(\theta_e) \\ w_r - w_c \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

o primeiro passo na síntese desses controladores foi a obtenção da superfície de deslizamento, que foi definida como:

$$\sigma(\xi_e) \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_v(x_e) \\ \sigma_w(y_e, \theta_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x_e \\ k_2 y_e + \sin(\frac{\theta_e}{2}) \end{bmatrix} = 0, \quad (5.13)$$

em que k_1 e k_3 são ganhos escalares positivos e k_2 deve ser ajustado, tal que $k_2 \cdot v_r > 0$.

O controlador cinemático por modo deslizante de primeira ordem foi definido como:

$$\eta_c = \begin{bmatrix} v_c \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_v \text{sign}(\sigma_v(x_e)) \\ \rho_w \text{sign}(\sigma_w(y_e, \theta_e)) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

ao passo que o controlador por modo deslizante de primeira ordem com camada limite foi obtido como:

$$\eta_c = \begin{bmatrix} v_c \\ w_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_v \frac{\sigma_v(x_e)}{\|\sigma_v(x_e)\| + \epsilon_1} \\ \rho_w \frac{\sigma_w(y_e, \theta_e)}{\|\sigma_w(y_e, \theta_e)\| + \epsilon_2} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Em ambas as leis de controles (5.14) e (5.15) os ganhos escalares e positivos ρ_v e ρ_w devem ser sintonizados com valores suficientemente grandes, tal que garantam que as trajetórias do sistema (5.12) sejam forçadas para a superfície $\sigma(\xi_e) = 0$, em tempo finito. O ajuste dos parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 no caso do controlador (5.15) permite reduzir os efeitos de *chattering*, contudo,

ao custo da diminuição do grau de robustez. Quanto maiores os valores desses parâmetros, menos susceptível aos efeitos de *chattering* será o sistema, entretanto, terá menor robustez a incertezas e perturbações. Portanto, o ajuste de ϵ_1 e ϵ_2 deve buscar um equilíbrio entre robustez e redução de *chattering*.

O controlador cinemático por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting* foi obtido como:

$$\begin{aligned}
 v_c &= v_1 + v_2 \\
 v_1 &= a_v \sqrt{\|y_1\|} \text{sign}(y_1) \\
 \dot{v}_2 &= b_v \text{sign}(y_1) \\
 w_c &= w_1 + w_2 \\
 w_1 &= a_w \sqrt{\|z_1\|} \text{sign}(z_1) \\
 \dot{w}_2 &= b_w \text{sign}(z_1),
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

em que $y_1 = \sigma_v(x_e)$ e $z_1 = \sigma_w(y_e, \theta_e)$. Esse controlador força as trajetórias de erro de postura (5.12) para a superfície (5.13), em tempo finito, ajustando-se seus ganhos (a_v , b_v , a_w e b_w), de maneira a atender as condições:

$$\begin{aligned}
 a_v^2 &\geq \frac{4C_v}{k_1^2} \frac{(b_v + C_v)}{(b_v - C_v)} \\
 b_v &\geq \frac{C_v}{k_1} \\
 a_w^2 &\geq \frac{4C_w}{\Gamma_m^2} \frac{\Gamma_M(b_w + C_w)}{\Gamma_m(b_w - C_w)} \\
 b_w &\geq \frac{C_w}{\Gamma_m},
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

em que a constante positiva C_v define limites para $\ddot{\sigma}_v(x_e)$ e as constantes, também positivas, C_w , Γ_m e Γ_M definem limites para $\ddot{\sigma}_w(y_e, \theta_e)$, conforme foi detalhado no Capítulo 4. Na sequência, as trajetórias utilizadas nos testes são apresentadas.

5.4 Trajetórias

Os resultados de simulação e experimentais são obtidos considerando trajetórias circulares que normalmente são utilizadas na literatura [17, 19, 32]. São consideradas três trajetórias denominadas C1, C2 e C3, cuja diferença está na velocidade com que são traçadas. Ademais, uma quarta trajetória, denominada de trajetória M, caracterizada por velocidade linear constante e velocidade angular variante no tempo, é considerada por permitir analisar o

comportamento dos controladores em situações em que o robô realiza retas e curvas com aceleração e desaceleração.

Essas trajetórias são calculadas pelas equações que descrevem o comportamento cinemático do robô de referência, estudado no Capítulo 4:

$$\dot{\xi}_r = S_{r_{pos}}(\xi_r)\eta_r \quad (5.18)$$

em que:

$$S_{r_{pos}}(\xi_r) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_r) & 0 \\ \sin(\theta_r) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_r = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ \theta_r \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \eta_r = \begin{bmatrix} v_r \\ w_r \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

sendo ξ_r e η_r referências de postura e velocidade.

As três diferentes trajetórias circulares são construídas com o auxílio do modelo (5.18), com as velocidades de referência definidas na tabela 5.5 e com a seguinte condição inicial de postura:

$$\xi_r(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Tabela 5.5 – Velocidades de referência para as trajetórias circulares.

| Trajetoária | $v_r \text{ (m/s)}$ | $w_r \text{ (rad/s)}$ |
|-------------|---------------------|-----------------------|
| C1 | 0,5 | 0,5 |
| C2 | 0,5 | $\frac{\pi}{10}$ |
| C3 | 1 | $\frac{\pi}{5}$ |

A quarta trajetória, denominada de trajetória M,   constr ida considerando a condição inicial de postura (5.20), a velocidade linear constante

$$v_r = 0,5 \text{ m/s}, \quad (5.21)$$

e a velocidade angular definida, em relação ao tempo, como:

$$w_r = 0,5 \cos(0,2t) \text{ rad/s para } t \leq 40\text{s} \text{ e } w_r = 0 \text{ para } t > 40\text{s} \quad (5.22)$$

As simulações são obtidas com o uso da ferramenta computacional Simulink (Matlab) e da função ODE3, com amostragem de $0,1 \text{ ms}$ para o cálculo da resposta temporal do sistema. Na sequência, estudam-se os resultados da simulação para o cenário ideal.

5.5 Cenário Ideal

Denomina-se cenário ideal o caso em que o robô tem seu comportamento descrito pelo modelo de postura (5.5) sujeito apenas à perturbação de carga. Dessa forma, emula-se o caso em que o controle é aplicado em um sistema bem conhecido, pois a síntese dos controladores foi baseada nesse modelo. São testadas três estruturas de controle compostas pelo controle de dinâmica inversa com ação proporcional (5.10) em cascata com os seguintes controladores cinemáticos: (i) por modo deslizante de primeira ordem (5.14), (ii) por modo deslizante de primeira ordem com camada limite (5.15), (iii) e por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting* (5.16).

O objetivo desse estudo é verificar o comportamento dos controladores cinemáticos por modo deslizante no caso em que o sistema é bem conhecido. Neste cenário, considera-se apenas a trajetória C1 (ver Tabela 5.5), e que uma perturbação de carga de 50 kg, metade da carga máxima suportada pelo robô, é introduzida no sistema aos sete segundos de simulação. Isto causa um aumento de massa e inércia do robô de, aproximadamente, 42%. Ademais, a condição inicial de postura do robô é definida como:

$$\xi(0) = \begin{bmatrix} -0,7 \\ -0,5 \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

A matriz de ganhos K_p do controlador dinâmico (5.8) foi escolhida como uma matriz diagonal:

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{p_v} & 0 \\ 0 & k_{p_w} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Partindo-se do objetivo de garantir uma resposta rápida da malha interna, escolheu-se para a convergência de v_e e w_e tempos de respostas pequenos, respectivamente, 0,5 s e 0,1 s. Então, com o auxílio da ferramenta *PID Tool* do *Matlab* determinou-se, para atender a esse requisito, $k_{p_v} = 4$ e $k_{p_w} = 20$. Logo, tem-se que:

$$K_p = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

A seguir são estudados resultados de simulação com as estruturas de controle descritas.

5.5.1 Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem

Nesta seção, estuda-se o resultado da simulação do cenário ideal com o controle de rastreamento por modo deslizante de primeira ordem, composto pelo controle de dinâmica inversa (5.8) com ação proporcional (5.10) e pelo controle cinemático por modo deslizante de primeira ordem (5.14). Frisa-se que o sinal η_c (5.14) é construído com a função $\text{sign}(x)$ e, portanto, o termo $\dot{\eta}_c$, que compõe a lei de controle dinâmico (5.10) é nulo para $x \neq 0$, contudo, analiticamente não é definido para $x = 0$, por este ser um ponto de descontinuidade. Apesar disto, em implementação numérica, apresenta valores muito elevados e indesejados. Em decorrência desses fatos, o termo $\dot{\eta}_c$ é desconsiderado para a estratégia de CMD1.

O ajuste dos parâmetros da superfície deslizante foram ajustados seguindo as delimitações descritas no capítulo anterior, como:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 10 \text{ e } k_3 = 1, \quad (5.26)$$

da mesma forma que os ganhos do controlador (5.14), foram definidos como:

$$\rho_v = 1, \quad \rho_w = 2. \quad (5.27)$$

A análise da trajetória C1 realizada pelo robô, apresentada na Figura 5.2, mostra que o robô é capaz de rastrear adequadamente a trajetória de referência com erros pequenos.

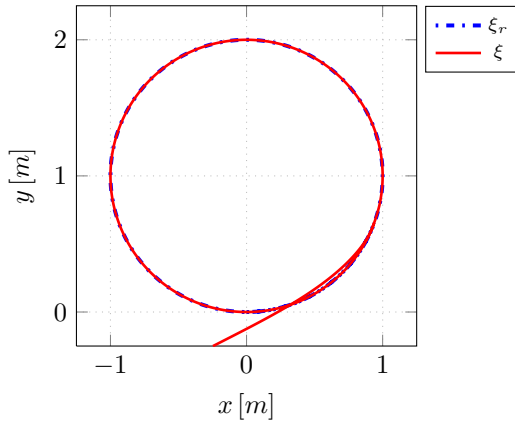


Figura 5.2 – Trajetória C1 do RMRD com CMD1.

Os sinais de erro de postura, mostrados nas Figuras 5.3 e 5.4, convergem com valores máximos da ordem de 10^{-6} e confirmam o resultado

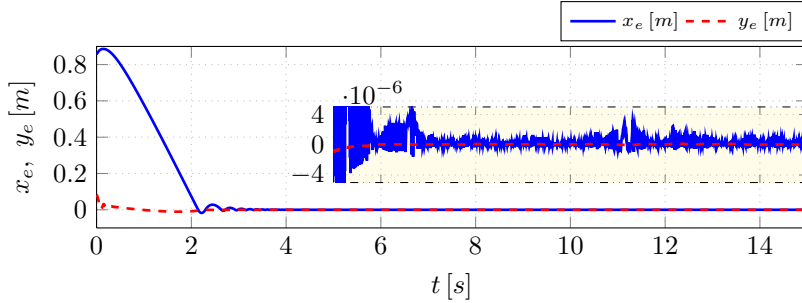


Figura 5.3 – Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1.

satisfatório. Além disso, tem-se os sinais das variáveis de deslizamento, mostradas na Figura 5.5, apresenta convergência em tempo finito com boa exatidão ao modo deslizante, atingindo erro máximo em regime permanente de aproximadamente 1×10^{-5} .

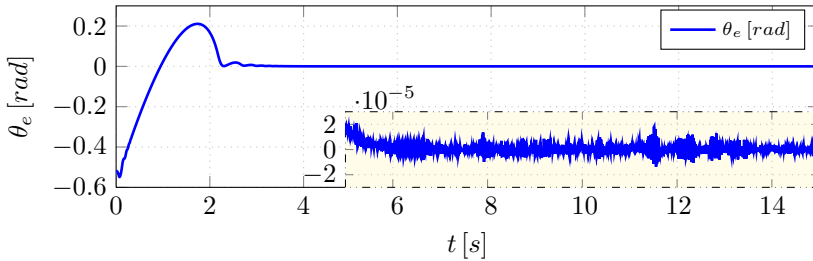


Figura 5.4 – Sinal do erro θ_e com CMD1.

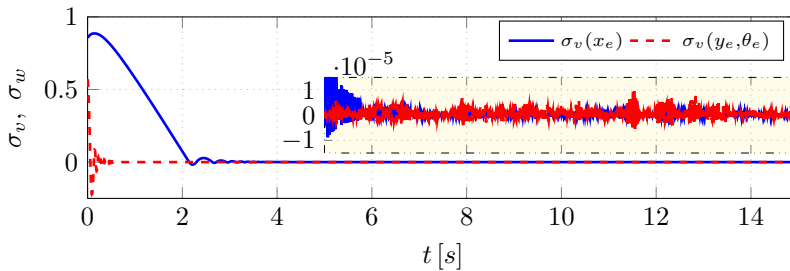


Figura 5.5 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1.

Os gráficos dos sinais de controle são omitidos, pois chaveiam com período aproximado de $2ms$ e a visualização gráfica fica comprometida. Os sinais de velocidades linear v e angular w do robô são mostradas, respectivamente, nas Figura 5.6 e 5.7 em que se pode verificar a convergência para os valores de referência $v_r = 0,5m/s$ e $w_r = 0,5m/s$ e, também, o efeito do chaveamento do sinal de controle que causa certo nível de *chattering*.

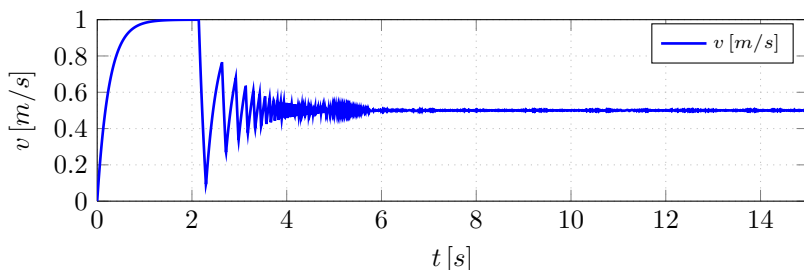


Figura 5.6 – Sinal da velocidade linear do RMRD com CMD1.

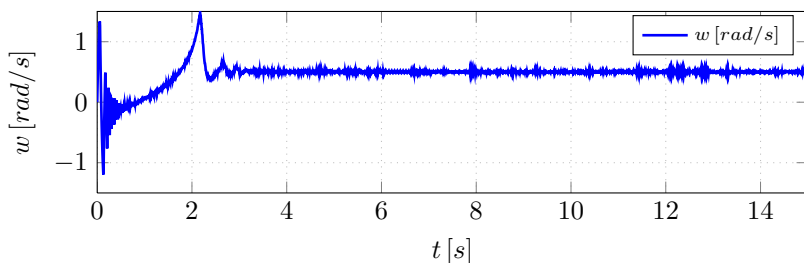


Figura 5.7 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1.

As oscilações de velocidade se propagaram e causaram ao sinal de controle τ_c efeitos de chaveamento com picos elevados da ordem de -1×10^4 N.m, sendo que em regime permanente chaveou entre picos de 3000 e -8000 N.m. Frisa-se que, embora as velocidades do robô converjam para os valores de referência, os sinais erro de velocidades η_e chaveiam em alta frequência entre picos de $-1,5$ e $0,5$ m/s para a velocidade linear e entre $-2,5$ e $1,5$ rad/s para a velocidade angular, devido à natureza descontínua do sinal de controle η_c . Dessa maneira, esses sinais de erro ao serem multiplicados pela matriz de inércia e pelo ganho K_b , nas leis de controle (5.8) e (5.10), geram os valores elevados de torque τ_c . Em síntese, os valores elevados são derivados da aplicação do controle de dinâmica inversa para rastrear um sinal

de referência de velocidade que chaveia entre valores consideráveis. Embora, esses valores não sejam adequados para a prática podem ser aceitos para a análise em simulação.

A perturbação de 50 kg inserida no sistema aos sete segundos foi compensada pela malha fechada que se mostrou robusta. Alguns testes considerando esse cenário ideal com perturbações de maiores magnitudes mostraram que é necessário o reajuste dos controladores da malha interna, aumentando o esforço de controle, para manter o tempo de resposta da malha interna pequeno e garantir a robustez.

5.5.2 Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite

Nesta seção, são mostrados os resultados da simulação realizados com o controle de rastreamento por modo deslizante de primeira ordem com camada limite (5.15). Os parâmetros da superfície de deslizamento são ajustados como (5.26) e os ganhos de controle como (5.27). Em adicional, os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 foram definidos com valor igual a 0.001, buscando o menor valor que atende bom desempenho de convergência ao modo deslizante, robustez e redução de *chattering*. Na Figura 5.8 é mostrado o gráfico da trajetória realizado com sucesso pelo robô.

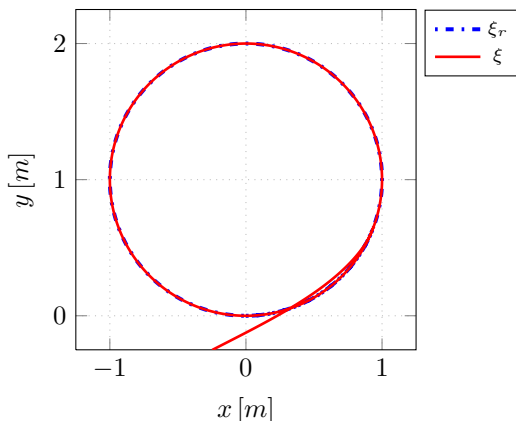


Figura 5.8 – Trajetória C1 do RMRD com CMD1 com camada limite.

O sinal de erro de posição é apresentado na Figura 5.9 e o de orientação na Figura 5.10, os quais convergiram com bom tempo de resposta e, em regime permanente, apresentaram valores de pico com módulos de aproxima-

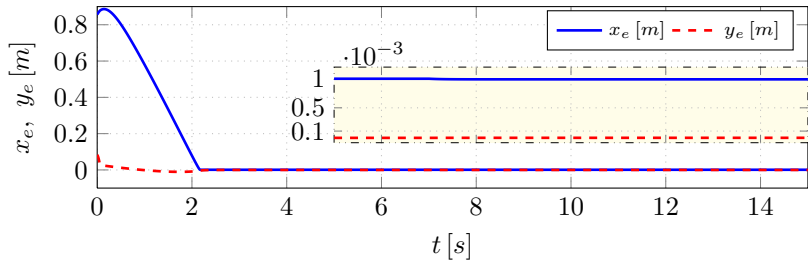


Figura 5.9 – Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1 com camada limite.

damente 1×10^{-3} , verificando bom desempenho do controlador.

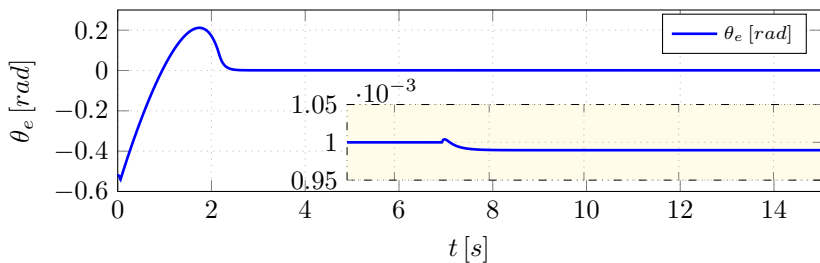


Figura 5.10 – Sinal do erro θ_e com CMD1 com camada limite.

Os sinais da variável de chaveamento $\sigma(\xi_e)$ são mostrados na Figura 5.11 e, neste caso, a exatidão de convergência em modo deslizante foi de aproximadamente 1×10^{-3} .

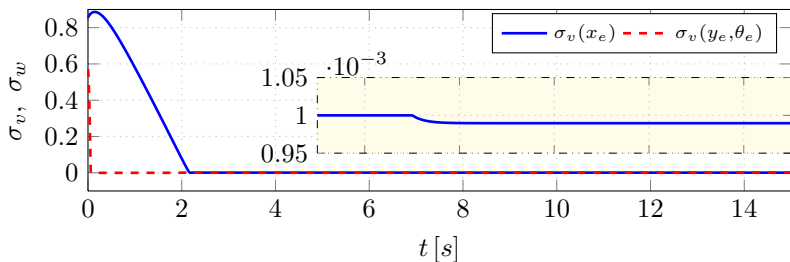


Figura 5.11 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1 com camada limite.

As velocidades linear e angular do robô apresentaram comportamento sem oscilações, como resultado dos sinais de controle contínuos v_c e w_c mos-

trados, respectivamente, nas Figuras 5.12 e 5.13. O sinal τ_c apresentou comportamento não oscilatório, entretanto, com picos iniciais da ordem de 1×10^5 e em regime permanente convergiu para $\tau_c = [-15 \ -30]^T$ N.m, antes da perturbação, e para $\tau_c = [-21 \ -42]^T$ N.m, após a perturbação, que são valores aceitáveis. Os picos de torque se devem às variações abruptas das velocidades v_c e w_c que implicam em valores elevados para a derivada $\dot{\eta}_c$ e para o erro η_e . Esses valores são usados no sinal de controle τ_c (5.10) gerando os valores de pico.

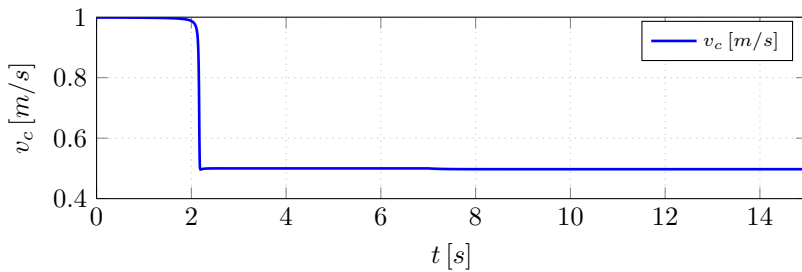


Figura 5.12 – Sinal de controle linear v_c do RMRD com CMD1 com camada limite.

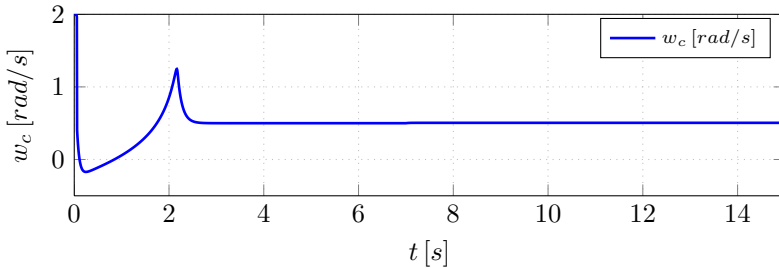


Figura 5.13 – Sinal de controle angular w_c com CMD1 com camada limite.

A perturbação de carga inserida no sistema aos sete segundos com valor de 50 kg foi compensada com sucesso e levou pequenas variações nos erros de rastreamento (ver Figuras 5.9 e 5.10). Testes com valores superiores a 50 kg mostram que essa variação cresce, mas é aceitável. Diferente do caso anterior, em que se empregou a técnica CMD1, não se observa *chattering* neste caso, pois o emprego do CMD1 com camada limite contorna esse problema.

5.5.3 Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Segunda Ordem *Super-Twisting*

Os resultados de simulação, em que se considera a aplicação do controle de rastreamento por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting* no cenário ideal, são estudados ao longo desta seção. A estrutura de controle considerada é composta pelo controlador de dinâmica inversa (5.8) com ação proporcional (5.10), cujo ajuste foi definido em (5.25), e pelo controlador cinemático (5.16).

Os ganhos da superfície de deslizamento são ajustados para este caso como:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 10 \\ k_3 &= 4, \end{aligned} \quad (5.28)$$

ao passo que os ganhos do controlador são escolhidos como:

$$\begin{aligned} a_v &= 1, \quad b_v = 0, 2 \\ a_w &= 1, 5, \quad b_w = 0, 6. \end{aligned} \quad (5.29)$$

A sintonia destes parâmetros visou obter desempenho adequado em simulação. Os parâmetros a_v e a_w influenciam a velocidade de resposta do sistema e b_v e b_w contribuem para a robustez do sistema. Sob a ação deste controle tem-se que o resultado do rastreamento da trajetória C1, representado graficamente na Figura 5.14, foi satisfatório.

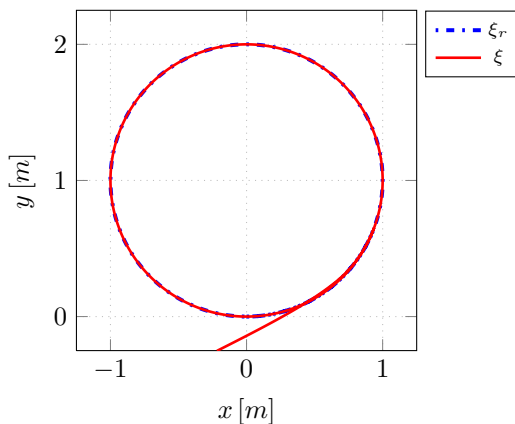


Figura 5.14 – Trajetória C1 do RMRD sob controle *super-twisting*.

Ademais, os sinais de erro de posição e orientação, mostrados nas Figuras 5.15 e 5.16, confirmam o bom resultado, pois, em regime permanente,

atingem valores máximos da ordem de 10^{-8} , que são menores que os vistos nos casos anteriores. Isto é reflexo da qualidade do CMD2 de ter melhor resposta que o CMD1 frente a limitações de amostragem.

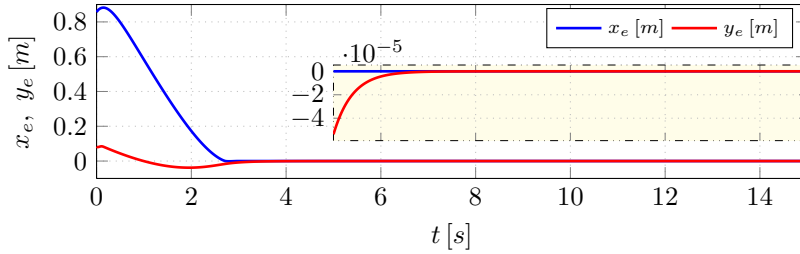


Figura 5.15 – Sinais dos erros x_e e y_e sob controle *super-twisting*.

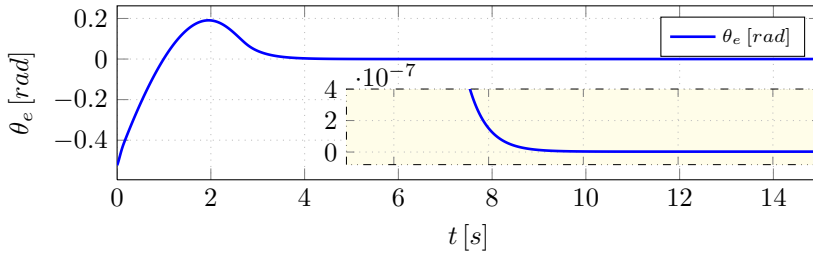


Figura 5.16 – Sinal do erro θ_e sob controle *super-twisting*.

Na Figura 5.17 são apresentados os sinais da variável de chaveamento que convergem em tempo finito e com exatidão melhor que nos casos com CMD1, pois os erros máximos em regime permanente foram de 3×10^{-8} .

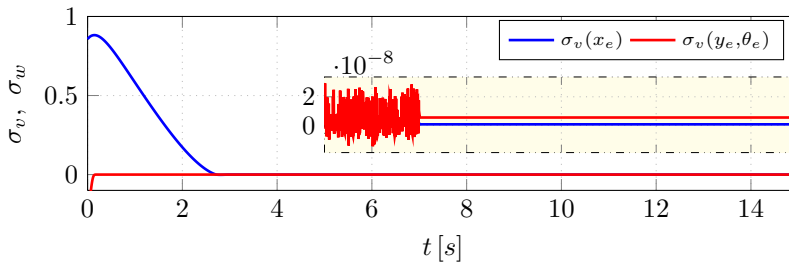


Figura 5.17 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob controle *super-twisting*.

Os sinais do controlador cinemático são apresentados nas Figuras 5.18 e 5.19 e convergem para os valores de referência com bom desempenho, apesar de apresentarem oscilações com amplitude da ordem de 10^{-4} que são refletidas nos sinais de velocidade do robô.

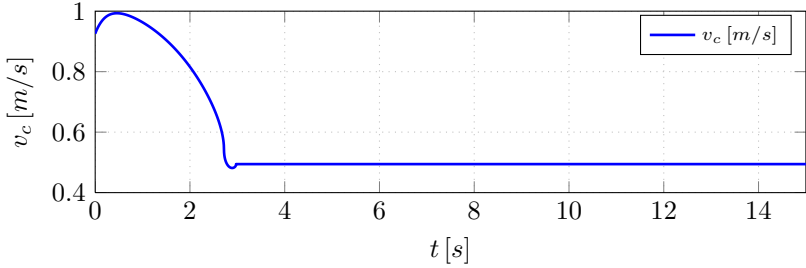


Figura 5.18 – Sinal de controle linear v do RMRD sob controle *super-twisting*.

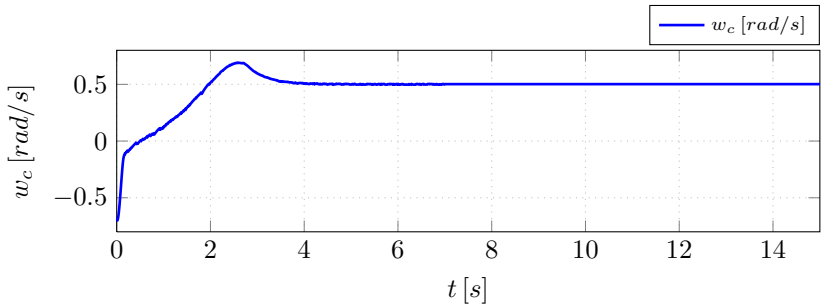


Figura 5.19 – Sinal de controle angular w_c sob controle *super-twisting*.

O sinal de controle τ_c atinge picos iniciais da ordem de 10^4 e em regime permanente chaveia entre ± 700 . Neste caso, é o sinal de $\dot{\eta}_c$ associado ao controle de dinâmica inversa (5.10) que produz esses valores elevados. Nota-se que $\dot{\eta}_c$ é composto por \dot{v}_2 e \dot{w}_2 (5.16) que dependem, respectivamente, de $\text{sign}(y_1)$ e $\text{sign}(z_1)$. Embora, a diminuição dos ganhos b_v e b_w da lei de controle (5.16) possa reduzir o módulo do sinal τ_c , essa redução pode ser insuficiente e, além disso, não se evitaria o chaveamento derivado do termo $\dot{\eta}_c$. Dessa maneira, fica evidente a necessidade de outro controle mais adequado como, por exemplo, o controle PD (5.11), conforme será visto adiante.

De maneira equivalente aos resultados com as outras duas estruturas de controle vistos anteriormente, obteve-se boa robustez com o controlador CMD2 *super-twisting* frente à perturbação de 50 kg. Testes revelaram que a

robustez é mantida mesmo para valores de perturbação superiores a 10 vezes a massa do robô. Contudo, para valores ainda maiores, nota-se oscilações nos erros de rastreamento.

5.5.4 Comentários

A análise dos resultados, obtidos no cenário ideal com a aplicação das estruturas de controle em cascata sintetizadas, mostram que as três estruturas de controle estudadas oferecem respostas em malha fechada satisfatórias. Destaca-se que em condições ideais, isto é, em que não há dinâmicas negligenciadas e pode-se chavear em alta frequência, um CMD1 oferece resposta robusta e com bom desempenho, sem ser afetado por *chattering*.

A exemplo dos estudos do Capítulo 4, novamente, a estrutura com o algoritmo *super-twisting* ofereceu melhor exatidão para convergir os sinais da variável de chaveamento a zero, conforme esperado. Confirmou-se a robustez dos controladores a perturbação externa de carga, por meio do estudo da resposta do sistema a variação de carga que gerou um aumento de peso e de inércia do RMRD de aproximadamente 42%.

No caso em que se empregou o CMD1, verificou-se um sobressinal de chaveamento nos sinais de velocidades do RMRD, que se propagou pela malha de controle e gerou oscilações de *chattering* nas variáveis de estado mas que, devido a suas pequenas magnitudes, são desprezíveis. Esse comportamento é derivado dos seguintes fatores:

1. Limitação da frequência de chaveamento do sinal de controle, que idealmente deveria ser infinita.
2. Negligência de dinâmica. Note que ao se aplicar o controle dinâmico composto por (5.8) e (5.10) ao sistema (5.5) tem-se como resultado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pos}(\theta) \eta \\ -K_p \eta_e \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

em que se tem a dinâmica de erro de rastreamento de trajetória, que é negligenciada na síntese do controle cinemático. Isto reforça a importância da convergência de η_e com tempo de resposta pequeno. Neste caso, isto seria obtido com o aumento de K_p , entretanto, implicaria em valores elevados e indesejados de torque. Desta maneira, fica evidente a necessidade de utilizar o controle PD no lugar do proporcional.

Esse comportamento oscilatório pôde ser verificado também no caso tratado com o CMD2 *super-twisting*, conforme ilustrado com a ampliação sobre os sinais de erro e, embora apresente oscilações com magnitudes bem

menores que os visto para a estratégia com camada limite, estas oscilações podem ser amplificadas, caso existam outras dinâmicas negligenciadas. Por isso, a importância do controle PD ser inserido na malha de controle para auxiliar na redução de efeitos de *chattering*, provenientes da excitação de dinâmicas não modeladas.

Para todos os casos existem picos nos sinais de entrada de torque τ_c , além de oscilação com amplitude elevada em regime permanente nos casos em que se empregou as técnicas CMD1 e CMD2 *super-twisting*, por motivos distintos para cada um dos casos como foi explicado. Esses picos e oscilações devem ser contornados para atender os requisitos do problema de controle do RMRD, em que se tem limitações de atuação e precisa-se de resposta rápida da malha interna. Isso fortalece a justificativa para o uso do controle PD (5.11) para compor a lei de controle dinâmico (5.8), conforme será visto com o estudo do cenário realístico, realizado na sequência.

5.6 Cenário Realístico

O controle de um RMR não holonômico, além das dificuldades relacionadas a restrições de movimento, subatuação e não linearidades, possui o desafio de limitações físicas de atuação do sistema, perturbações externas, incertezas paramétricas e estruturais referentes a dinâmicas não modeladas. Um cenário realístico é desenvolvido para simular essas dificuldades e servir como base para a análise e validação de três estruturas de controle. Cada uma delas é composta pelo controlador dinâmico, proposto com o controle de dinâmica inversa (5.8) e o controle PD (5.11), em cascata com um dos controladores cinemáticos estudados, que empregam as técnicas CMD1, CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting*.

O cenário é construído com base no modelo de configuração do RMRD (5.1), que além da dinâmica do robô como um corpo rígido no espaço, engloba as dinâmicas dos atuadores. Adicionalmente, são considerados em simulação restrições de atuação definidas pelos limites das velocidades do robô, limites de tensão, corrente e torque de saída dos motores e, ainda, pelos limites de amostragem referentes ao Powerbot, que são descritos na Tabela 5.4. As taxas de amostragem da malha interna e externa de controle do robô são distintas. Na malha interna em que se tem o controle dinâmico o período de amostragem é de 5 ms . Por outro lado, na externa, em que se tem o controlador cinemático, esse período é três vezes maior, ou seja, 15 ms . Já a resposta temporal do comportamento do robô é computada com período de amostragem de $0,1\text{ ms}$, conforme o diagrama mostrado na Figura 5.20

Nas simulações, novamente, considera-se a perturbação de carga de 50 kg que ocorre aos sete segundos e, além disso, assume-se que existem

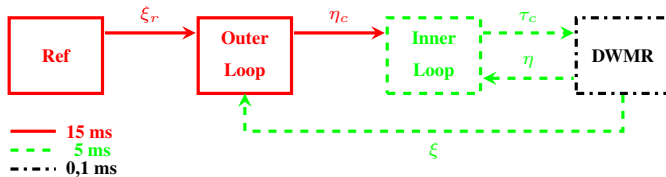


Figura 5.20 – Diagrama dos tempos de amostragem das malhas de controle do robô.

incertezas paramétricas de $+10\%$ sobre os parâmetros listados nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3, exceto para n_w .

Os testes são conduzidos com a trajetória C1 e a trajetória M, em que a velocidade angular varia no tempo segundo a Equação (5.22). A condição inicial do robô é escolhida diferente do caso anterior, para exemplificar:

$$q(0) = \begin{bmatrix} -0,7 \\ 0,5 \\ -\frac{\pi}{6} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

O controlador de dinâmica inversa com a ação PD visa garantir a convergência do erro de rastreamento de velocidade $\eta_e = \eta_c - \eta$, com tempo de resposta pequeno em detrimento a dinâmicas não modeladas, e diminuir as oscilações no sinal τ_c , verificadas nos estudos da seção anterior. Os ganhos proporcionais k_{p_v} e k_{p_w} do controlador (5.11) foram escolhidos conforme (5.25), ao passo que os outros parâmetros (k_{d_v} , k_{d_w} , N_v e N_w) foram ajustados, em simulação, para garantir uma resposta rápida frente a influência da dinâmica dos atuadores que não foram modeladas. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} k_{p_v} &= 4, & k_{p_w} &= 20 \\ k_{d_v} &= 2, & k_{d_w} &= 10 \\ N_v &= 10, & N_w &= 10 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Na sequência, são explorados os resultados da aplicação das estruturas de controle com os diferentes controladores cinemáticos ao cenário descrito.

5.6.1 Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem

Nesta seção, apresenta-se o estudo no cenário realístico do desempenho da estrutura de controle composta pelo controlador dinâmico representado por (5.8) e (5.11) e pelo controlador cinemático (5.14), sintetizado com

a técnica CMD1. Testes realizados, com os ganhos dados em (5.26) e (5.27) para o controle cinemático e com os ganhos (5.32) para o controlador dinâmico, mostraram desempenho em malha fechada degradado devido a efeitos de *chattering*. Buscou-se reajustar os ganhos dos controladores para diminuir a amplitude das oscilações observadas nos sinais da variável de deslizamento decorrentes do *chattering*. Embora, tenha sido possível reduzir a amplitude das oscilações, não se obteve um resultado satisfatório para o rastreamento de trajetórias.

A seguir são estudados os resultados em que se diminuiu os ganhos do controlador cinemático (5.14) para:

$$\begin{aligned}\rho_v &= 0,7 \\ \rho_w &= 0,7\end{aligned}\tag{5.33}$$

e se reajustou o ganho k_2 da superfície (5.13) para $k_2 = 2$ para reduzir as oscilações de *chattering*. Os outros parâmetros dos controladores foram mantidos.

Os sinais da variável de chaveamento tiveram um comportamento oscilatório como é mostrado na Figura 5.21.

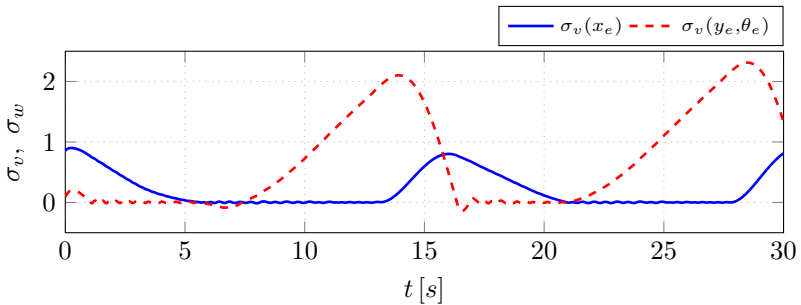


Figura 5.21 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1.

Os sinais de controle de velocidade v_c e w_c que geram esse comportamento são mostrados nas Figuras 5.22 e 5.23, respectivamente.

Os efeitos de *chattering* podem ser estudados pelos sinais de $\sigma_v(x_e)$, $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ e pelos sinais de controle v_c e w_c . Na Figura 5.21 o sinal de $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ converge para um comportamento oscilatório de amplitude pequena em torno de zero entre $t \cong 1$ s até $t \cong 6$ s, período em que o controle w_c chaveia em frequência limitada como mostrado na Figura 5.23. A dinâmica negligenciada dos atuadores e a limitação de amostragem são causadores dessas oscilações que impedem a convergência de $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ a zero.

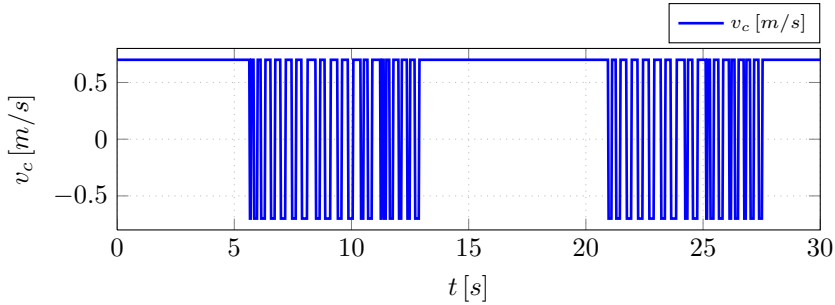


Figura 5.22 – Sinal de controle linear v_c do RMRD com CMD1.

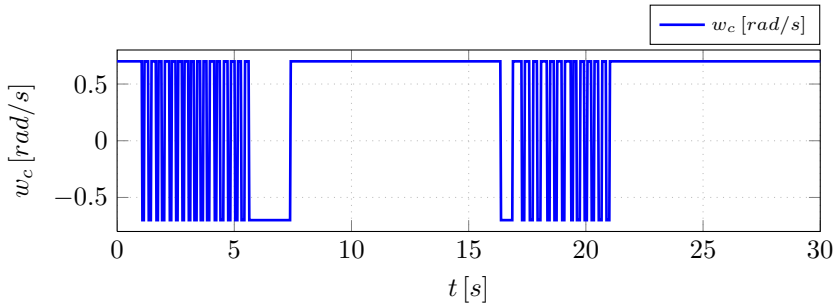


Figura 5.23 – Sinal de controle angular w_c com CMD1.

Conforme mostrado nas Figuras 5.21 e 5.22, em $t \cong 6s$, o sinal de $\sigma_v(x_e)$ se aproxima e começa a oscilar com amplitude pequena em torno de zero e o controle v_c começa a chavear. Como consequência a dinâmica não modelada sofre maior excitação, que aliada à influência das incertezas paramétricas, da perturbação de carga que ocorre aos 7s e do acoplamento do sistema, faz com que $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ tenha uma oscilação com magnitude maior entre $t \cong 6s$ e $t \cong 17s$. Em seguida, $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ volta a oscilar com amplitude pequena em torno de zero.

Continuando a análise, em $t \cong 14s$, o valor atingido por $\sigma_w(y_e, \theta_e)$ e o chaveamento de v_c fazem com que $\sigma_v(x_e)$ oscile com maior amplitude entre $t \cong 14s$ e $t \cong 21s$, devido ao acoplamento do sistema e a excitação da dinâmica não modelada. Esse comportamento oscilatório se repete e perdura no tempo como efeito de *chattering* causado pela limitação de frequência de chaveamento e pela ação da dinâmica não modelada que impedem que se consiga forçar o sistema ao modo deslizante. O trabalho de Lee e Utkin [40] comprova esse resultado.

Como consequência de não forçar o sistema ao modo deslizante, os sinais de erro também tiveram comportamento oscilatório, conforme mostrado nas Figuras 5.24 e 5.25.

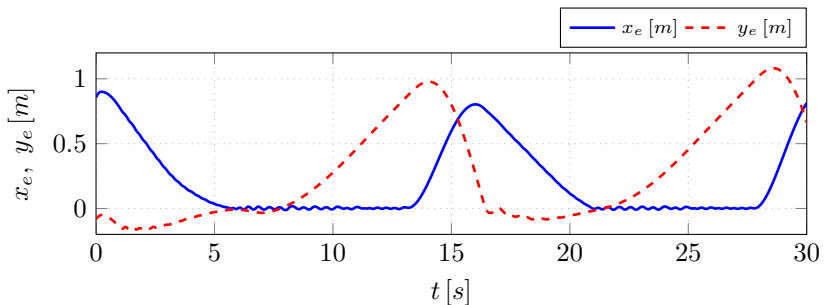


Figura 5.24 – Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1.

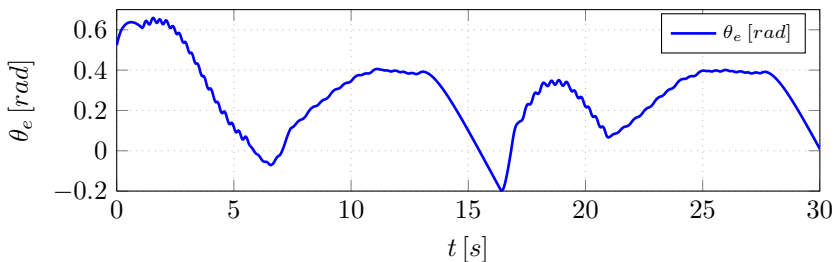


Figura 5.25 – Sinal do erro θ_e com CMD1.

Em resumo, os dois principais fatores responsáveis pelo comportamento oscilatório do sistema são:

- O limite da frequência de chaveamento devido à amostragem da malha externa ser limitada a 15 ms, que atrasa a ação de controle necessária para um bom resultado. Essa limitação de chaveamento é evidente nos sinais v_c e w_c que no caso tratado no cenário ideal podiam chavear com frequência de até 0,1 ms.
- A presença de dinâmicas rápidas não modeladas representadas, neste caso, pela dinâmica dos atuadores, que ao serem excitadas pelo sinal chaveado, descaracterizam o sinal de controle que deveria ser aplicado à dinâmica principal do sistema, degradando sua resposta.

Aliados a esses dois fatores, têm-se ainda as incertezas paramétricas, perturbação de carga e limitação de atuação influenciando no comportamento do sistema.

Como será visto na sequência, a aplicação do CMD1 com camada limite evita essas oscilações e garante convergência da variável de deslizamento para uma região em torno de zero. Como consequência, garante-se resposta de malha fechada satisfatória, embora com menor robustez que a de um CMD1 em condições ideais.

5.6.2 Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Primeira Ordem com Camada Limite

A combinação da técnica de camada limite com o CMD1 é empregada para reduzir os efeitos causados por *chattering*. Nesta seção, é estudada a aplicação da estrutura que combina o controlador dinâmico proposto com o controle PD e o controlador cinemático por modo deslizante de primeira ordem com camada limite ao cenário realístico. Considera-se para isso os mesmos ajustes feitos para o controlador cinemático no estudo do cenário ideal, em que os parâmetros da superfície e os ganhos do controlador são dados, respectivamente, nas Equações (5.26) e (5.27), e, entretanto, foi necessário reajustar ϵ_1 e ϵ_2 em 0,01, com propósito de evitar *chattering* e garantir o modo deslizante.

Diferente do caso anterior, o controle com camada limite é capaz de rastrear trajetórias em detrimento aos fatores que causam *chattering*, como pode ser verificado com a análise da trajetória C1 realizada pelo RMD, mostrada na Figura 5.26.

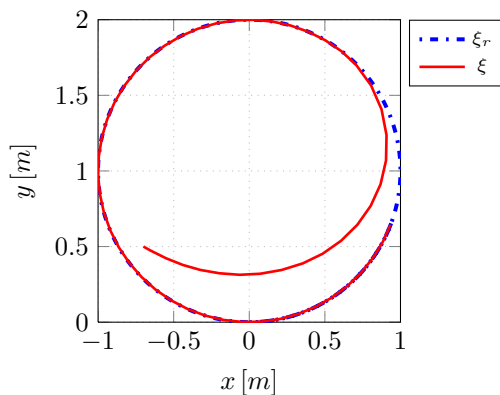


Figura 5.26 – Trajetória C1 do RMRD com CMD1 com camada limite.

Neste caso, o sinal de controle, por ser contínuo, não excita as dinâmicas dos atuadores, desconsideradas no projeto de controle, e força as trajetórias do sistema para a camada limite em torno da superfície. Assim, garante resposta satisfatória do sistema em malha fechada.

Os erros de rastreamento de trajetória, mostrados nas Figuras 5.27 e 5.28, tiveram valores em regime permanente maiores que os obtidos no caso com camada limite estudado no cenário ideal, mas apesar disso, são aceitáveis. Os sinais de x_e e θ_e convergiram, aproximadamente, para 0,01 e a de y_e para 2×10^{-4} . Isso se deve às incertezas, perturbação de carga e às demais características consideradas nesse cenário.

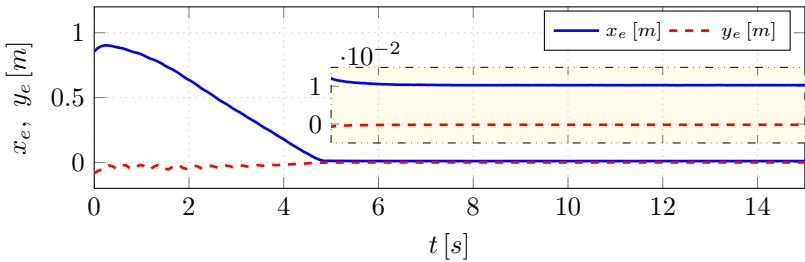


Figura 5.27 – Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1 com camada limite.

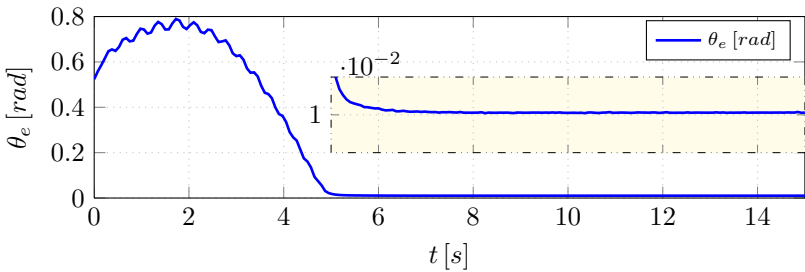


Figura 5.28 – Sinal do erro θ_e com CMD1 com camada limite.

Os sinais das variáveis de chaveamento $\sigma_v(x_e)$ e $\sigma(y_e, \theta_e)$, que são mostradas na Figura 5.29, convergiram, respectivamente, para 0,01 e 3×10^{-3} . As oscilações de *chattering*, vistas no sinal de $\sigma_w(y_e, \theta_e)$, também são verificadas nos sinais de y_e e θ_e e se propagam por meio da lei de controle w_c (ver Figura 5.30), para os sinais de velocidade linear v e angular w do robô, que são mostrados respectivamente nas Figuras 5.31 e 5.32.

Em contrapartida, o sinal de controle v_c apresenta comportamento não

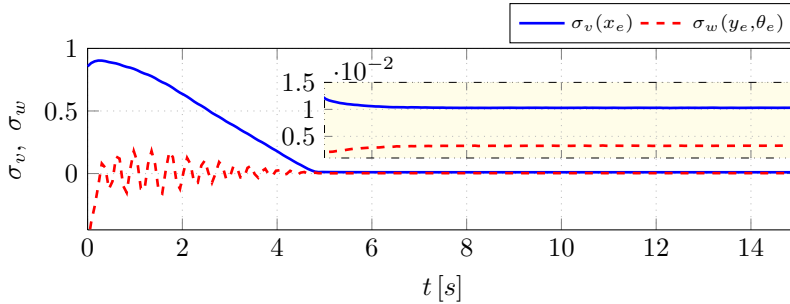


Figura 5.29 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ com CMD1 com camada limite.

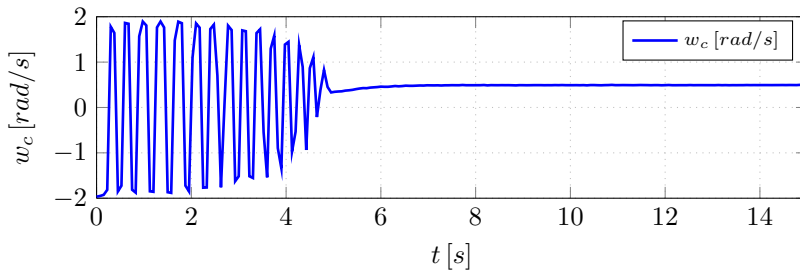


Figura 5.30 – Sinal de controle angular w_c com CMD1 com camada limite.

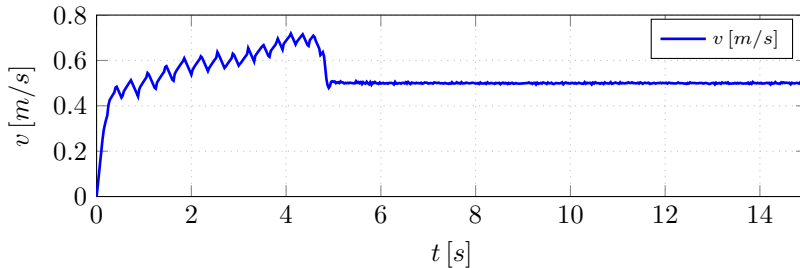


Figura 5.31 – Sinal de velocidade linear v do RMRD com CMD1 com camada limite.

oscilatório (ver Figura 5.33). O aumento dos valores de ϵ_1 e ϵ_2 diminuiria esse chaveamento, mas ao custo da diminuição da robustez e aumento do erro.

O sinal de controle τ_c , que é injetado na entrada de controle do motor u_a , comuta entre valores de ± 200 e gera valores de torque entregues ao robô que comuta entre -20.45 a $19 N.m$, devido às limitações dos atuadores.

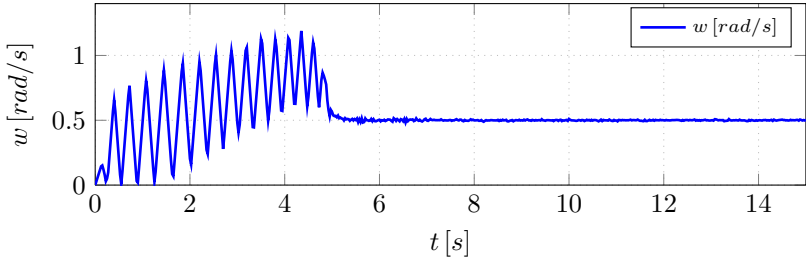


Figura 5.32 – Sinal de velocidade angular w com CMD1 com camada limite.

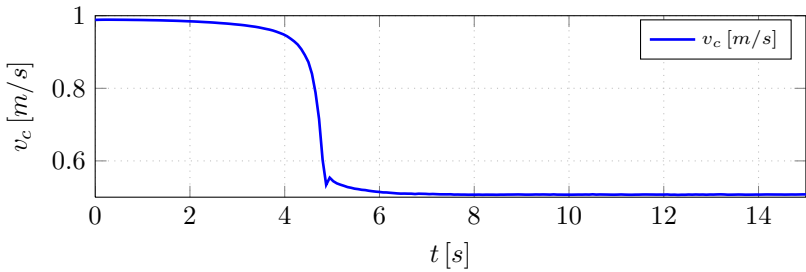


Figura 5.33 – Sinal de controle linear v_c do RMRD com CMD1 com camada limite.

O resultado do robô realizando a trajetória M é mostrado na Figura 5.34. Pode-se verificar que o RMRD, linha vermelha sólida, rastreia com sucesso a referência, a linha pontilhada em azul.

Os erros de rastreamento da trajetória M são ilustrados nos gráficos das Figuras 5.35 e 5.36. A variável x_e tem comportamento senoidal com amplitude pequena em torno de 0,01 e a variável y_e em torno de zero com amplitude de 2×10^{-4} , para w_r variante, conforme mostrado com ampliação na Figura 5.37. Em seguida, para $w_r = 0$, x_e converge, praticamente, para 0,01 e y_e comuta entre valores da ordem de 10^{-4} em torno de zero.

Esse mesmo comportamento é verificado para θ_e , mas oscila com o dobro da frequência e maior amplitude do que y_e para $w_r \neq 0$, conforme visto na Figura 5.38 e comuta entre valores da ordem de 10^{-4} para $w_r = 0$. Isso ocorre devido à relação entre essa variável imposta pela superfície $\sigma_w(y_e, \theta_e) = 0$, com a ponderação dos ganhos k_2 e k_3 . Observou-se também uma oscilação nos sinais de erro em $t \cong 40s$ devido a mudança repentina de w_r para zero.

A diminuição dos valores de ϵ_1 e ϵ_2 poderia melhorar a exatidão desse controle. Entretanto, ao ajustá-los em 0,001, o sinal de controle se aproxi-

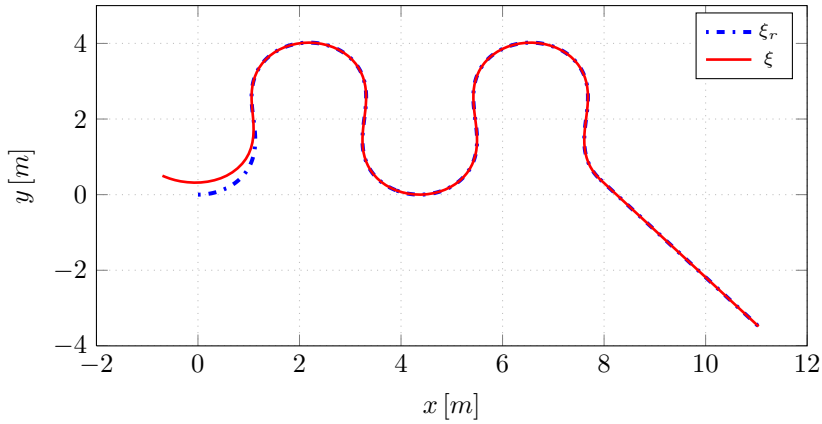


Figura 5.34 – Trajetória M do RMRD com CMD1 com camada limite.

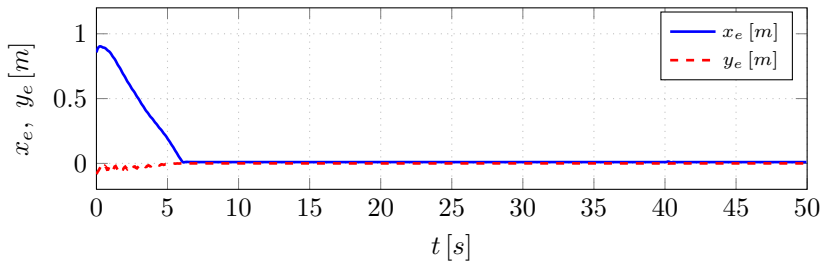


Figura 5.35 – Erros x_e e y_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite.

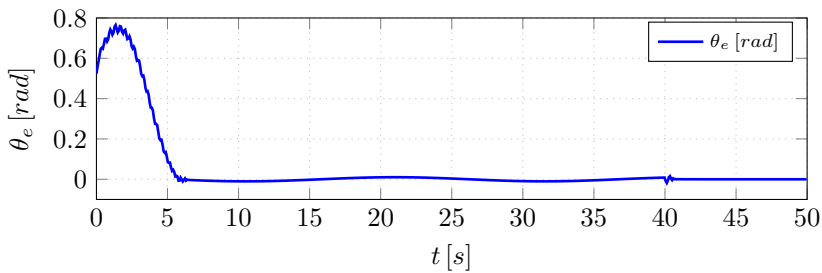


Figura 5.36 – Erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite.

mou do sinal de controle com o CMD1 visto no caso anterior e a amplitude das oscilações aumentaram. Esse fato verifica a dificuldade entre redução de

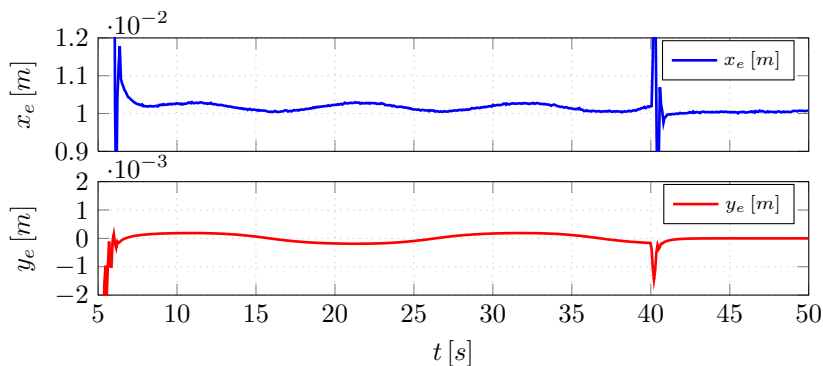


Figura 5.37 – Ampliação dos erros x_e e y_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite.

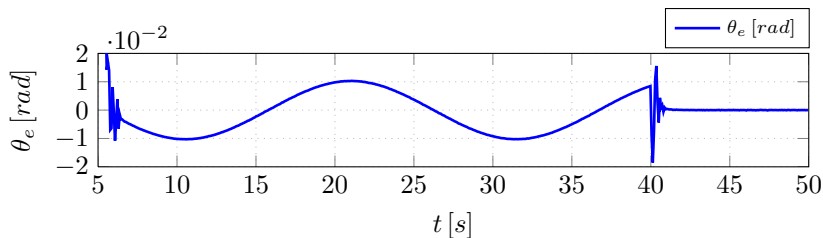


Figura 5.38 – Ampliação do erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite.

chattering e robustez da técnica com camada limite e pode ser contornada com a aplicação do CMD2 *super-twisting*.

5.6.3 Controle de Rastreamento por Modo Deslizante de Segunda Ordem Super-Twisting

Os resultados obtidos na seção anterior mostram que a combinação de um controle dinâmico com PD e um controle cinemático por modo deslizante é uma solução satisfatória, quando se tem elementos que causam *chattering*. Contudo, a solução com o CMD1 com camada limite apresentou erros maiores que os vistos no cenário ideal, devido a redução de robustez inerente ao uso da camada limite. No entanto, pode-se atingir melhores resultados utilizando uma técnica de CMD2, conforme visto na sequência. Deste modo,

nesta seção estuda-se os resultados oferecidos pela estrutura de controle proposta neste trabalho aplicada ao cenário realístico. Lembrando que essa estrutura é composta pelo controlador dinâmico que emprega o controle de dinâmica inversa (5.8) e o PD (5.11), em cascata com o controlador cinemático por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting* (5.16). Enfatiza-se também que as propriedades dessa técnica de CMD2 garantem maior robustez à malha de controle, conforme discutido no Capítulo 3.

Neste caso, os ganhos do algoritmo *super-twisting* foram reajustados, em relação aos ganhos usados no cenário ideal, como:

$$\begin{aligned} a_v &= 1 \\ b_v &= 0, 1 \\ a_w &= 1, 2 \\ b_w &= 0, 3, \end{aligned} \quad (5.34)$$

assim como os parâmetros da superfície que são dados como:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 10, \quad \text{e} \quad k_3 = 2. \quad (5.35)$$

O objetivo dessa sintonia foi obter melhor desempenho da malha fechada, com uma ação do controlador cinemático menos agressiva e que permita boa associação entre os controladores em cascata.

A trajetória C1 obtida em simulação é apresentada na Figura 5.39 e consiste em uma boa resposta às dificuldades estudadas neste cenário.

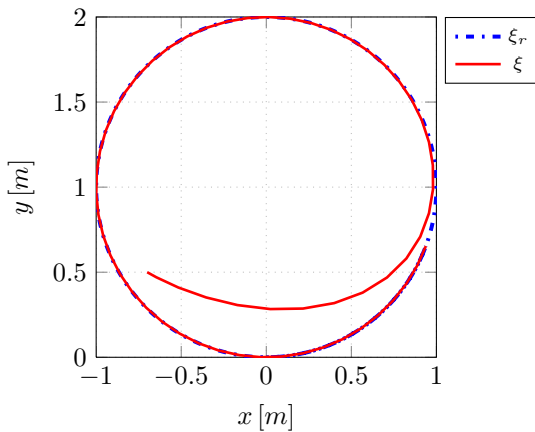


Figura 5.39 – Trajetória C1 do RMRD sob controle *super-twisting*.

O bom desempenho é verificado também por meio dos erros de posição e orientação representados nas Figuras 5.40 e 5.41. Nesse caso, x_e , y_e e

θ_e oscilam no em torno de zero com amplitudes máximas da ordem de 10^{-4} , resultado melhor quando comparado ao obtido com o controle com camada limite. Isso já era esperado devido às características da técnica de CMD2 de melhor exatidão de modo deslizante em relação a limitação de chaveamento e a presença de dinâmicas não modeladas, em comparação com a técnica de CMD1.

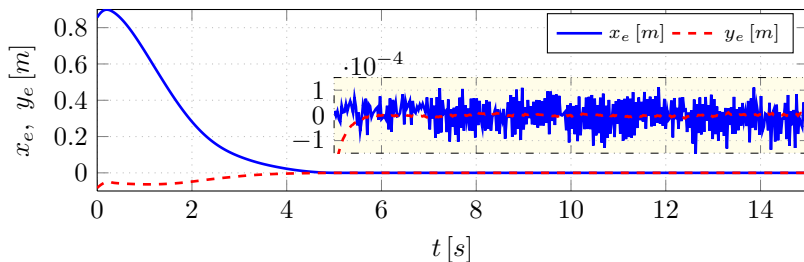


Figura 5.40 – Sinais dos erros x_e e y_e sob controle *super-twisting*.

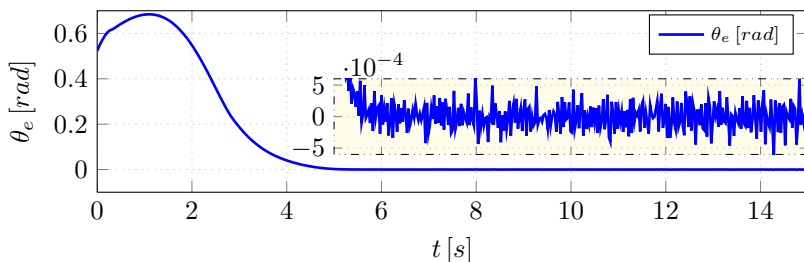


Figura 5.41 – Sinal do erro θ_e sob controle *super-twisting*.

Como esperado, os sinais da variável de chaveamento convergem com menores erros, quando comparado com o resultado com a técnica de CMD1 com camada limite, sendo esses da ordem de 10^{-4} . O comportamento das variáveis de chaveamento ao longo do tempo é mostrado na Figura 5.42.

Os sinais de velocidades v e w (ver Figuras 5.43 e 5.44), e de controle v_c e w_c (ver Figuras 5.45 e 5.46), apresentaram sobressinal de *chattering*.

Contudo, os sobressinais têm amplitude pequena e seus efeitos são desprezíveis, logo não comprometem o desempenho da malha fechada. Embora, a aplicação da técnica de CMD2 não esteja livre de *chattering*, sua associação com o controle PD garante a redução desse fenômeno e bons resultados de controle.

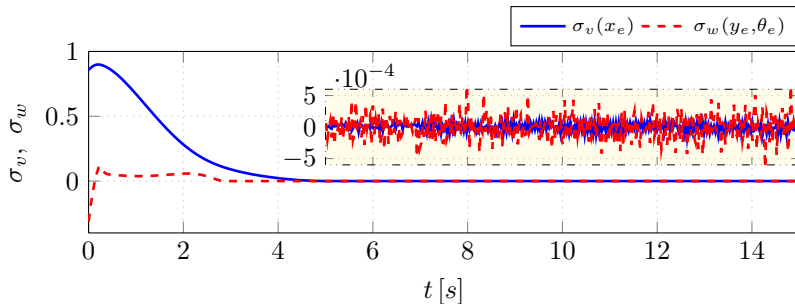


Figura 5.42 – Sinais de $\sigma(\xi_e)$ sob controle *super-twisting*.

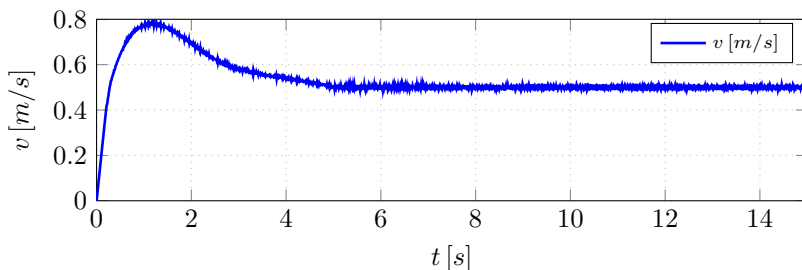


Figura 5.43 – Sinal da velocidade linear v do RMRD sob controle *super-twisting*.

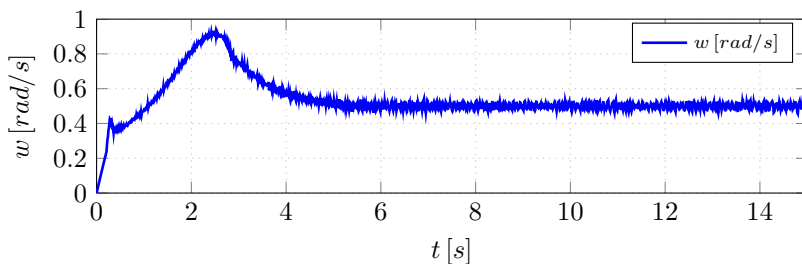


Figura 5.44 – Sinal da velocidade angular w sob controle *super-twisting*.

A exemplo do que ocorreu para a malha de controle com camada limite, o sinal τ_c , para este caso, também oscila entre valores de ± 200 , e o torque entregue ao robô pelo motor oscila entre -20.45 a 19 N.m.

A aplicação da estratégia de controle ao caso em que o RMRD deve rastrear a trajetória M, também mostrou melhores resultados que a malha com

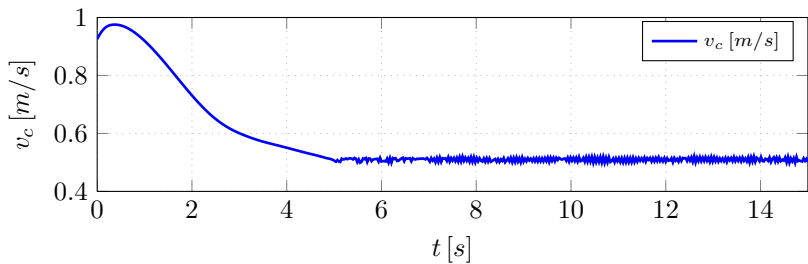


Figura 5.45 – Sinal de controle linear v_c do RMRD sob controle *super-twisting*.

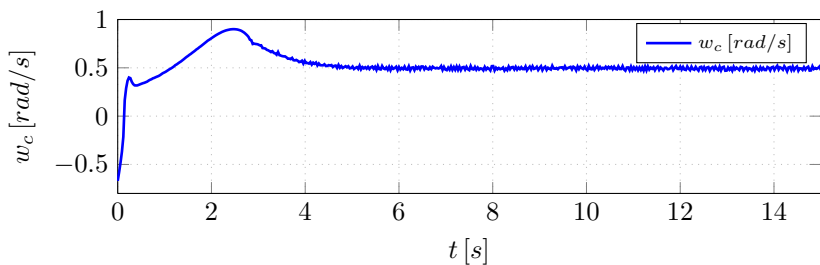


Figura 5.46 – Sinal de controle angular w_c sob controle *super-twisting*.

o CMD1 com camada limite, pois os erros de postura convergiram sem o comportamento oscilatório em regime permanente verificados no caso anterior. A trajetória realizada em simulação é mostrada na Figura 5.47.

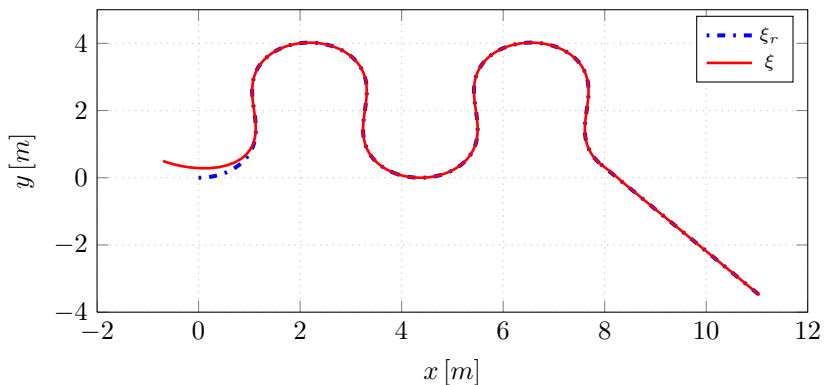


Figura 5.47 – Trajetória M do RMRD sob controle *super-twisting*.

Já os erros de posição e orientação são mostrados, respectivamente, nas Figuras 5.48 e 5.49.

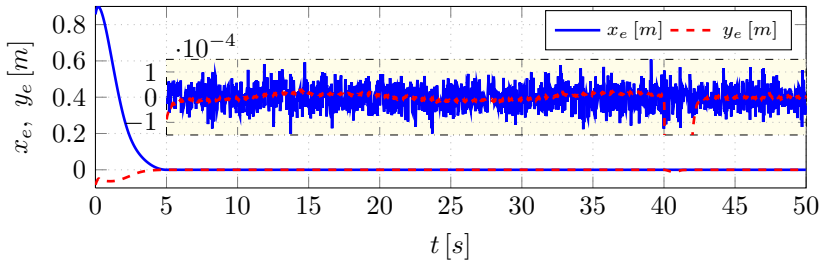


Figura 5.48 – Erros x_e e y_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite.

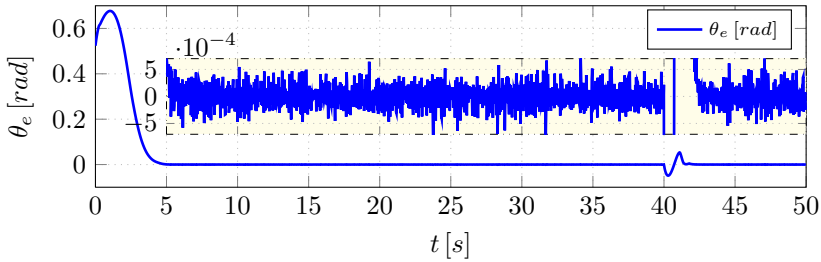


Figura 5.49 – Erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite.

Em regime permanente, os erros x_e e θ_e comutaram em torno de zero entre valores da ordem de 10^{-4} e, por sua vez, y_e comutou em torno de zero entre valores da ordem de 10^{-5} para $w_r \neq 0$, e entre valores da ordem de 10^{-6} para $w_r = 0$. Uma oscilação em θ_e ocorre em $t = 40s$ devido à mudança repentina de w_r para zero e em seguida a variável converge.

Os resultados apresentados mostram o potencial da estrutura de controle proposta, pois verificou boa robustez frente aos fatores que geram *chattering*. Testes hipotéticos com essa estrutura de controle, em que se aumentou o valor da indutância de armadura dos motores ($L_a = 0,5H$), parâmetro que interfere na constante de tempo das dinâmicas negligenciadas no projeto dos controladores, tiveram como resultado oscilações de *chattering* sobre as variáveis de estado do sistema, conforme ilustrado na Figura 5.50 com sinal de $\sigma(\xi_e)$. Isto evidencia a influência das constantes de tempo de dinâmicas negligenciadas na ocorrência de *chattering*. Felizmente, em novos testes, constatou-se que o reajuste de parâmetros dos PD, a saber $N_v = N_w = 100$, permite reduzir essas oscilações e garantir uma boa resposta da estratégia de

controle, conforme mostrado na Figura 5.51 com sinal de $\sigma(\xi_e)$. Os resultados desses dois testes, apesar das extrapolações, são úteis para ilustrar a importante função dos controladores PD na estratégia proposta.

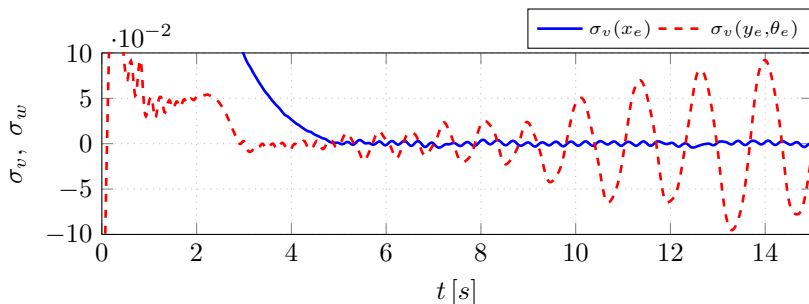


Figura 5.50 – Erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite.

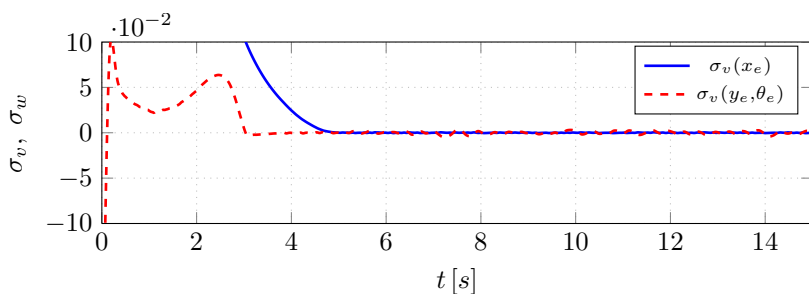


Figura 5.51 – Erro θ_e para a trajetória M, com CMD1 com camada limite.

5.6.4 Comentários

Confrontando os resultados obtidos com o cenário ideal e o realístico, pode-se constatar a influência de dinâmicas não modeladas, incertezas e limites de atuação sobre o desempenho de controle. Os efeitos mais severos foram verificados no caso da estrutura que empregou o CMD1. No cenário ideal, essa estrutura teve resposta satisfatória, entretanto ao ser sujeitada à presença de dinâmicas rápidas, não incluídas no projeto de controle, e a limitação de chaveamento, teve seu desempenho comprometido e a malha fechada apresentou comportamento oscilatório e sem modo deslizante.

Embora, a estrutura de controle que emprega a técnica CMD1 com camada limite, no cenário ideal, tenha apresentado menor robustez que a estru-

tura com a técnica de CMD1, no cenário realístico, essa estratégia se destacou e atingiu o modo deslizante, como consequência da sua propriedade de evitar *chattering* por meio de leis de controle contínuas. Contudo, essa solução implica em redução de robustez, pois limita a exatidão do modo deslizante em troca de redução de *chattering*.

Na sequência dos estudos, foi possível melhorar os resultados com o emprego do controle proposto, com ação de controle PD para o controlador dinâmico e com controlador cinemático por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting*. A característica da técnica de CMD2 de gerar um sinal de controle contínuo e ter melhor exatidão em modo deslizante, quando se tem limitação de chaveamento, possibilitou resultados com menores erros para o rastreamento das trajetórias utilizadas nos testes. Esse fato evidencia que essa combinação tem potencial para gerar bons resultados em implementações práticas, em que, além das dificuldades já expressas no cenário realístico, os controladores devem contornar a influência de dinâmicas rápidas de outros dispositivos e incertezas não consideradas nas simulações.

As duas estruturas de controle estudadas no cenário ideal com o controle de dinâmica inversa com ação proporcional e com os controladores cinemáticos baseados nas técnicas de CMD1 com camada limite e CMD2 *super-twisting* podem forçar o modo deslizante e rastrear trajetórias no cenário realístico. Entretanto, testes com essas estruturas nesse cenário mostram resultados com erros maiores devido às oscilações de *chattering*. Essas oscilações podem e foram diminuídas com a introdução do controle PD no lugar do controle proporcional em (5.8), o que implicou em menores erros de rastreamento. Enfatiza-se, também que testes no cenário realístico com a estrutura de controle em que se emprega a técnica de CMD1 e o controle proporcional foram realizados e resultaram em comportamento oscilatório e sem modo deslizante.

O uso do PD nas estruturas de controle com o CMD1 com camada limite e com o CMD2 *super-twisting* gerou sinais de controle τ_c com menores módulos, por oferecer resposta mais rápida para a convergência do erro de rastreamento de velocidade. Logo, ao acelerar a resposta da malha interna, esse controle tem papel importante na redução do *chattering* causado por dinâmicas rápidas não modeladas que possam ser excitadas.

No transitório verificou-se picos no sinal de controle τ_c derivados da associação de grandes erros de postura iniciais e a falta de perfis de velocidade e aceleração, o que implicou em grande esforço de controle. Isso evidencia a necessidade de se gerar trajetórias que, além de respeitar as características cinemáticas do robô, respeite também suas propriedades dinâmicas.

Na sequência, são mostrados os resultados obtidos com os experimentos no Powerbot, em que se considerou apenas os controladores sintetizados

com a técnica de CMD1 com camada limite e a de CMD2 *super-twisting*, pois estes mostram-se adequados para atacar o problema em uma implementação prática.

5.7 Estudo Experimental com o Powerbot

O Powerbot, robô utilizado nos experimentos, é composto de um chassi montado sobre quatro rodas, duas delas são livres e servem para sustentação, as outras duas são rodas simples montadas sobre um mesmo eixo e atuadas por motores DC. Ademais, esse robô possui um sistema de sensoramento em que a posição e orientação são medidas com sensores do tipo *dead-reckoning* e bússola; e também uma unidade de processamento embarcado para gerenciar as funções do robô. Um sistema operacional Linux é utilizado para gerir a unidade de processamento, sobre o qual se executa dois programas computacionais em associação para operar o robô: ROS (*Robot Operating System*) e OROCOS (*Open Robot Control Software*), que oferecem bibliotecas e ferramentas computacionais para criar aplicações robóticas [63]. Em conjunto, estes programas são utilizados para realizar a comunicação com os dispositivos periféricos do robô e criar uma aplicação em tempo real, em que se conseguiu garantir uma amostragem com período de $15ms$, ou seja, com frequência de $66Hz$.

Existe uma malha de controle interno no Powerbot, que consiste de controladores de ação PID (proporcional, integral e derivativa) em paralelo, que garante seguimento de referência de velocidade longitudinal v_c e rotacional w_c . O sistema operacional do Powerbot permite o ajuste dos ganhos dos controladores PID's, aqui denominados de k_{p_v} , k_{d_v} , k_{i_v} , k_{p_w} , k_{d_w} e k_{i_w} , em que os subíndices p , d e i identificam, respectivamente, ganho proporcional, derivativo e integral, ao passo que os subíndices v , w diferenciam entre o controle de rastreamento de velocidade longitudinal v_c e rotacional w_c . Contudo, não se tem liberdade para o ajuste do filtro do elemento derivativo do controle. A ação de controle integral é descartada e utiliza-se apenas as ações proporcional e derivativa, pois pretende-se avaliar a robustez da estrutura de controle proposta sem a interferência de uma segunda ação de controle, cuja característica principal é oferecer robustez.

Esse sistema de controle interno impossibilita a implementação exata do controle dinâmico proposto, entretanto, é possível obter-se resultados experimentais da associação do controle interno PD em cascata com os controladores cinemáticos por modo deslizante, que são suficientes para avaliar a proposta de controle. Frisando-se que o cerne da proposta é a combinação da técnica de CMD2 *super-twisting* com o controle PD e que o controle de dinâmica inversa tem um papel coadjuvante. Em virtude dessa nova confi-

guração, testes de simulação foram feitos antes de realizar os experimentos, para verificar a adequação dos controladores cinemáticos com a nova malha interna de controle e para estudar a sintonia dos ganhos.

O cenário de simulação, para este caso, foi construído com os mesmos modelos e limitações do cenário realístico, em que algumas mudanças foram feitas para representar o controle interno do Powerbot, que neste caso é o controlador dinâmico. Esse controle interno consiste de controladores PD que foram simulados por meio da função de transferência (5.11).

Além disso, mudanças no modelo do RMRD foram necessárias, pois os sinais de controle interno PD do Powerbot geram forças generalizadas que agem no centro de inércia do robô e devem ser convertidos em torques nas rodas, para serem tomadas como entradas de controle nos modelos construídos. Portanto, os sinais dos controladores PD foram pré-multiplicados pela matriz inversa de T_v , que relaciona torques nas rodas com torques generalizados, tendo essa matriz sido calculada no Capítulo 2 na Equação (2.79), e que é reescrita abaixo:

$$T_v^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix}. \quad (5.36)$$

Deseja-se testar o desempenho dos controladores propostos em dois cenários em que robô deve realizar as trajetórias circulares C2 e C3 (ver Tabela 5.5). A trajetória C3 foi definida com o dobro da velocidade da trajetória C2, aumentando a diversidade dos testes para a validação do controle. Além disso, considera-se que a condição inicial do robô é dada por:

$$q(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.37)$$

Os ganhos dos controladores PD foram ajustados conforme recomendação do fabricante:

$$\begin{aligned} k_{p_v} &= k_{p_w} = 40, \\ k_{d_v} &= k_{d_w} = 20 \end{aligned} \quad (5.38)$$

e o parâmetro N foi ajustado com valor 10, para garantir um bom tempo de resposta da malha interna e evitar *chattering*.

Na sequência, os resultados de simulação são introduzidos para então estudar as respostas experimentais com o Powerbot.

5.7.1 Resultados de Simulação

Inicialmente, considera-se os resultados com a estrutura que emprega o controlador cinemático por modo deslizante de primeira ordem com camada limite (5.15), cujos ganhos são ajustados, para diminuir as oscilações vistas no cenário realístico, como:

$$\begin{aligned}\rho_v &= 1 \\ \rho_w &= 1 \\ \epsilon_1 &= \epsilon_2 = 0,1,\end{aligned}\tag{5.39}$$

e os parâmetros da superfície foram reajustados como:

$$\begin{aligned}k_1 &= 1 \\ k_2 &= 5 \\ k_3 &= 2,\end{aligned}\tag{5.40}$$

O resultado em que o RMRD rastreia a trajetória C2 é mostrado na Figura 5.52, em que se constata boa resposta do sistema.

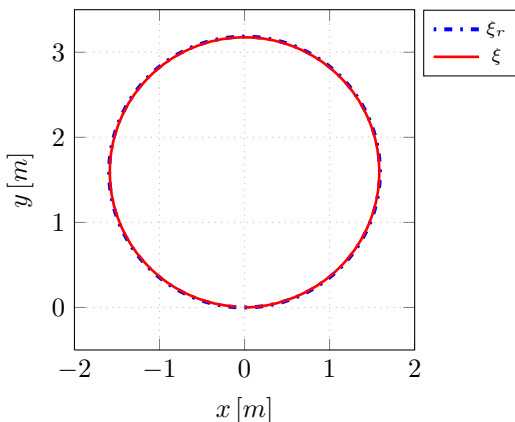


Figura 5.52 – Trajetória C2 com CMD1 com camada limite.

Os erros x_e e y_e são apresentados na Figura 5.53, e θ_e na Figura 5.54. Destaca-se que os erros x_e , y_e e θ_e convergem, respectivamente, para os valores aproximados de 0,01m, -0,003m e 0,065rad/s.

Esse arranjo tem bom desempenho e sem oscilações de velocidade como pode ser confirmado nas Figuras 5.55 e 5.56, que mostram as velocidades linear v e angular w do RMRD.

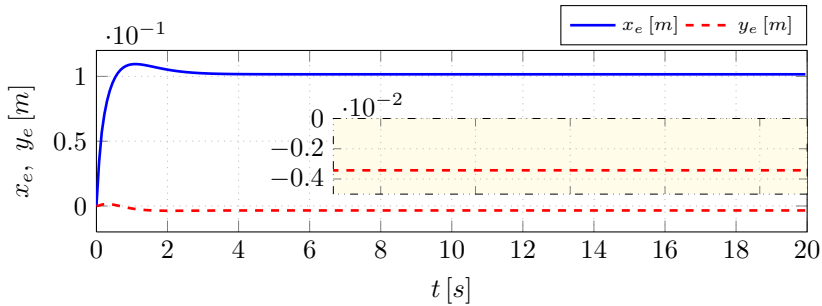


Figura 5.53 – Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1 com camada limite.

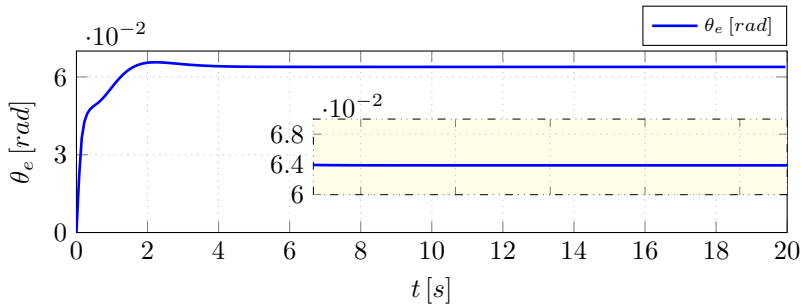


Figura 5.54 – Sinal do erro θ_e com CMD1 com camada limite.

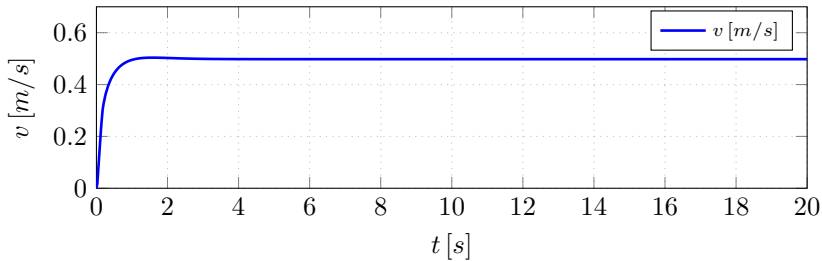


Figura 5.55 – Velocidade linear v com CMD1 com camada limite.

O resultado com a trajetória C3 teve erros em regime permanente maiores, devido ao aumento na velocidade, como pode ser verificado na Figura 5.57, que mostra a trajetória realizada pelo robô. O erro x_e convergiu para 0,7m, y_e para -0,055m e θ_e para 0,45rad/s. Esses resultados podem ser melhorados em simulação com o aumento dos ganhos ρ_v e ρ_w , e diminuição de

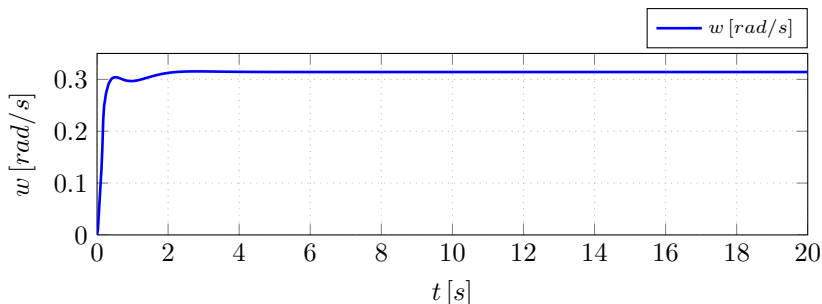


Figura 5.56 – Velocidade angular w com CMD1 com camada limite.

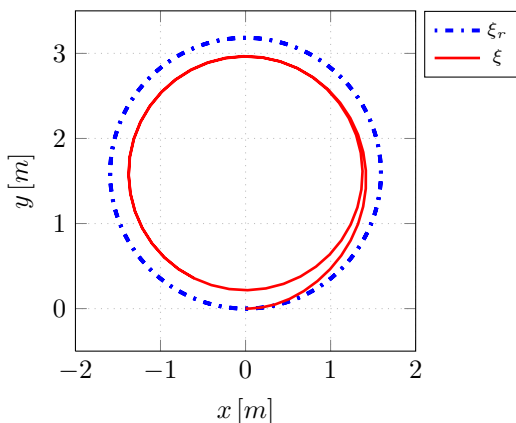


Figura 5.57 – Trajetória C3 com CMD1 com camada limite.

ϵ_1 e ϵ_2 . Em testes de simulação foi possível obter em regime permanente, erros x_e e θ_e da ordem de 10^{-2} e y_e da ordem de 10^{-4} com o reajuste do ganho dos controladores. Contudo, esse reajuste não foi possível para os resultados experimentais e por isso, descartou-se a apresentação desses testes.

Apesar do ambiente de simulação ser uma representação razoável do comportamento do Powerbot, infelizmente não contempla todos os seus detalhes como, por exemplo, a dinâmica dos sensores e de outros dispositivos. Esse fato reflete as diferenças encontradas nos resultados de simulação e experimentais.

Passa-se, agora, para o estudo com a estrutura de controle composta pelo controle dinâmico PD e pelo controle cinemático por modo deslizante de segunda ordem *super-twisting* (5.16), cujos ganhos foram, também, rea-

justados e são dados por:

$$\begin{aligned} a_v &= 0,7 \\ b_v &= 0,1 \\ a_w &= 0,5 \\ b_w &= 0,1; \end{aligned} \quad (5.41)$$

e, ainda, assumiu-se os mesmos parâmetros de superfície utilizados no caso anterior, descritos na Equação (5.40).

Os resultados obtidos em simulação foram satisfatórios e a trajetória C2 realizada pelo robô é mostrada na Figura 5.58.

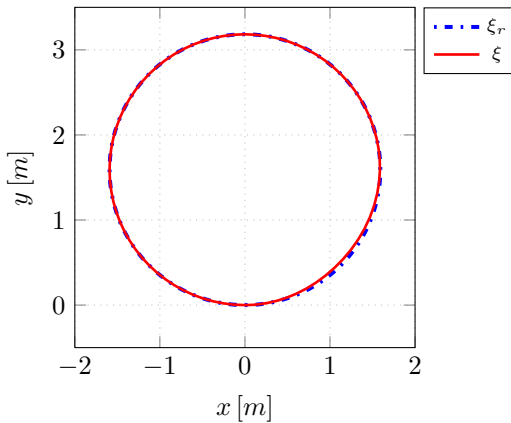


Figura 5.58 – Trajetória C2 sob controle *super-twisting*.

Nas Figuras 5.59 e 5.60 são apresentados os erros de posição e orientação.

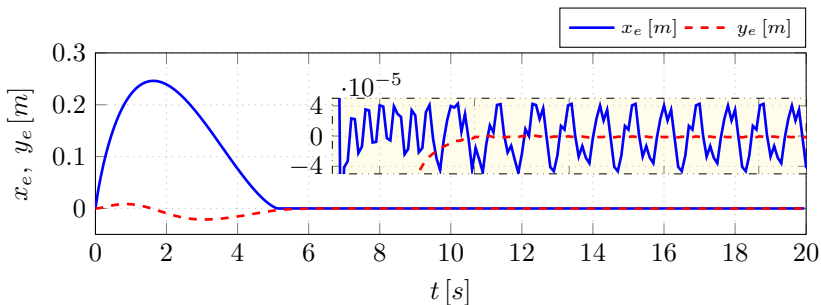


Figura 5.59 – Sinais dos erros x_e e y_e sob controle *super-twisting*.

Verificou-se bom desempenho, pois o erro x_e e θ_e converge para valores da ordem de 10^{-5} m e 10^{-5} rad/s, respectivamente, e o erro y_e da ordem de 10^{-6} m, que são menores que os vistos com CMD1 com camada limite.

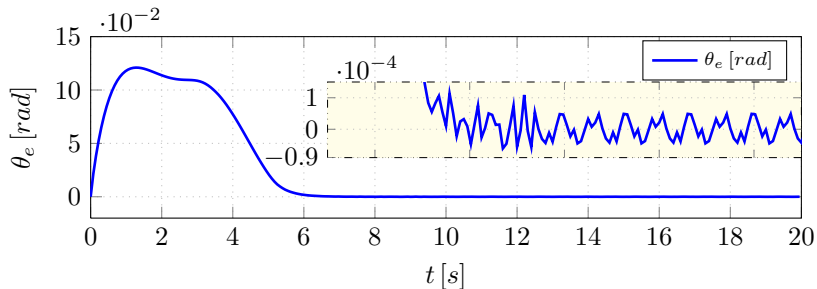


Figura 5.60 – Sinal do erro θ_e sob controle *super-twisting*.

Há um sobressinal de oscilação nos sinais de velocidade mostrados nas Figuras 5.61 e 5.62, entretanto, com amplitudes menores que as observadas no cenário realístico, por causa do reajuste dos ganhos.

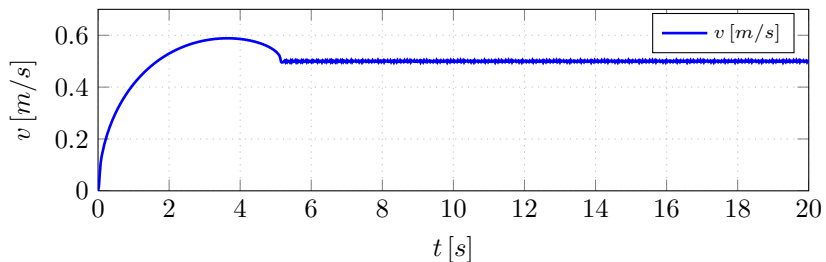


Figura 5.61 – Velocidade linear v sob controle *super-twisting*.

No teste com a trajetória C3 o melhor desempenho da estrutura com o CMD2 *super-twisting* fica mais evidente e isto é verificado com a análise da trajetória realizada pelo robô mostrada na Figura 5.63. Neste caso, os erros de postura x_e , y_e e θ_e convergem, respectivamente, para valores da ordem de 5×10^{-5} m, 3×10^{-6} m e 10^{-4} rad/s, que são menores que os valores observados com o CMD1 com camada limite. Desse modo, é mantida a robustez em regime permanente mesmo com o aumento da velocidade. Contudo, verificou-se em simulação que o tempo de convergência foi maior, cerca de 10s, isso devido à maior velocidade exigida de forma instantânea. Como solução, pode-se usar trajetórias que tenham aumento de velocidade gradual até atingir a velocidade desejada e aumentar o esforço de controle.

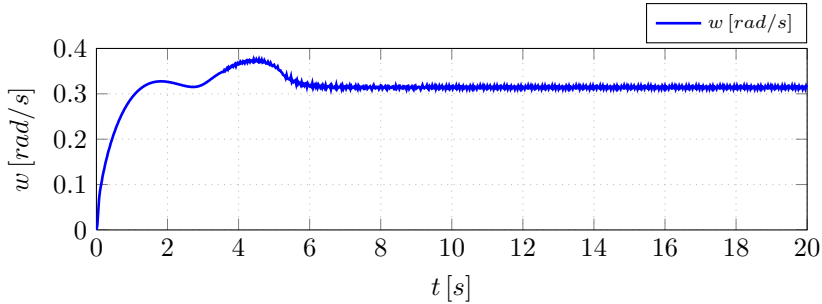


Figura 5.62 – Velocidade linear v sob controle *super-twisting*.

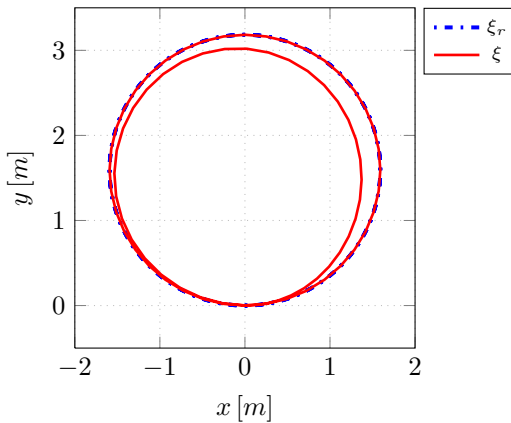


Figura 5.63 – Trajetória C3 do Powerbot sob controle *super-twisting*.

Os resultados de simulação mostram que os controladores com camada limite e *super-twisting* são adequados ao controle do Powerbot, com ressalvas para o caso em que o aumento de velocidade diminui consideravelmente o desempenho do CMD1 com camada limite. O aumento dos ganhos de ρ_v e ρ_w e a diminuição de ϵ_1 e ϵ_2 melhora esse desempenho em simulação, contudo isso não foi verificado em experimentos, provavelmente devido a fatores que não foram considerados na modelagem do sistema. Outra constatação importante foi que o uso apenas de PD's para o controle dinâmico, reduziu consideravelmente o valor do torque nas rodas, que atingiu pico máximo de $10N.m$, no caso do *super-twisting*. Na sequência, os resultados experimentais são apresentados.

5.7.2 Resultados Experimentais

Os resultados da simulação ofereceram uma prévia do que se pode esperar nos testes experimentais, os quais foram desenvolvidos com as mesmas trajetórias e ajustes dos controladores.

Os resultados experimentais em que o Powerbot rastreia a trajetória C2 por meio do controle por modo deslizante de primeira ordem com camada limite foram satisfatórios. A trajetória descrita pelo robô é mostrada na Figura 5.64.

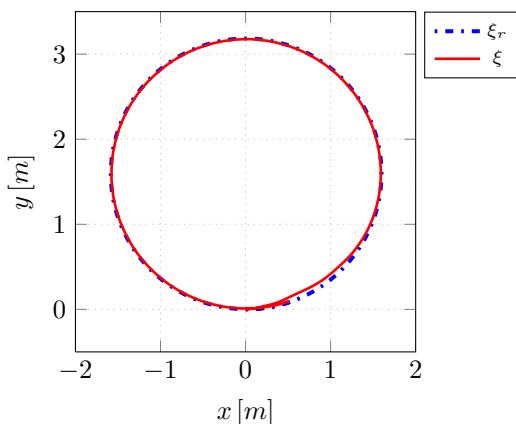


Figura 5.64 – Trajetória C2 com CMD1 com camada limite - experimental.

Os erros de postura e orientação x_e , y_e e θ_e , ver Figuras 5.65 e 5.66, convergiram, respectivamente, para 0, 1m, $y_e = -3,5 \times 10^{-3}m$ e 0,064rad/s.

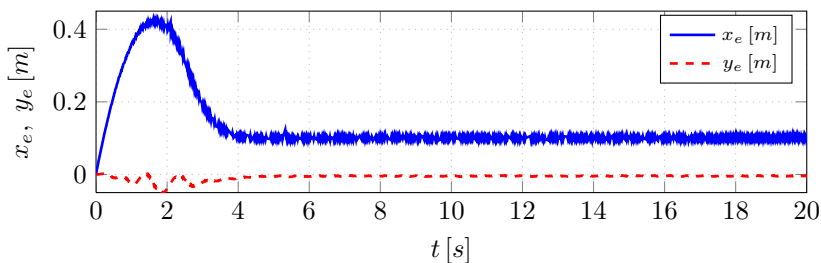


Figura 5.65 – Sinais dos erros x_e e y_e com CMD1 com camada limite - experimental.

Existe sobressinal de chaveamento nesses sinais de erro, assim como nos sinais de velocidade mostrados nas Figuras 5.67 e 5.68. Isso é derivado

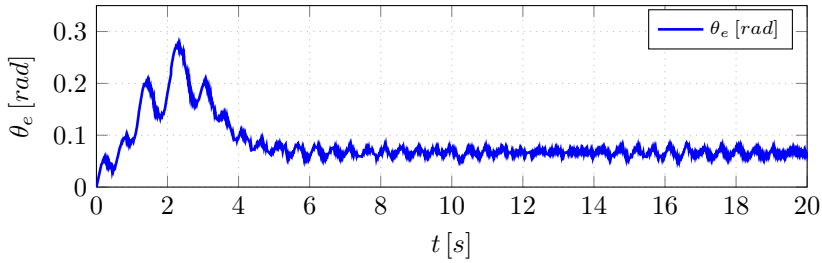


Figura 5.66 – Sinal do erro θ_e com CMD1 com camada limite - experimental.

do efeito de dinâmicas negligenciadas, imperfeições, incertezas e inexactidão de medidas referentes a sensores e outros dispositivos eletrônicos.

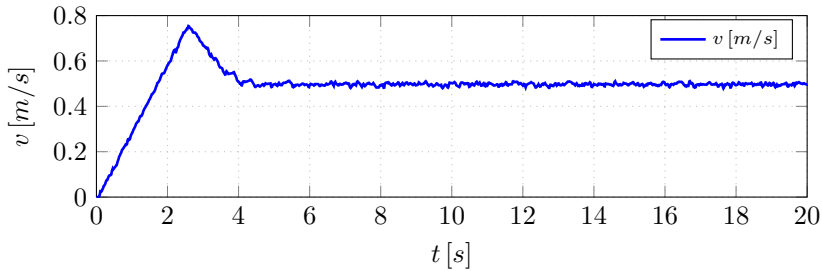


Figura 5.67 – Velocidade linear v com CMD1 com camada limite - experimental.

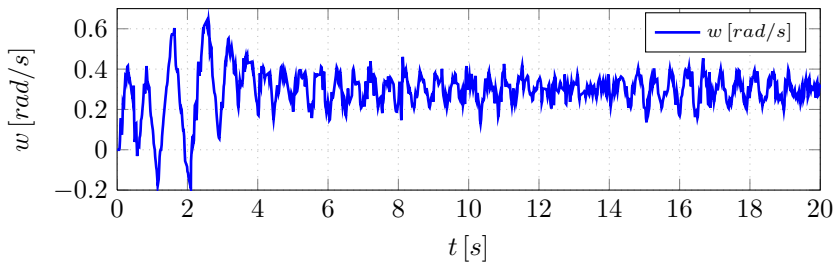


Figura 5.68 – Velocidade angular w com CMD1 com camada limite - experimental.

Ao traçar a trajetória C3, ver Figura 5.69, a robustez do controle é degradada e o rastreamento da trajetória é realizado com erros de postura e orientação consideráveis, posto que x_e , y_e e θ_e convergem, aproximadamente, para $0,67m$, $-0,055m$ e $0,44rad$. Outros ajustes de ganhos foram

testados em busca da diminuição dos erros mas sem sucesso. O aumento dos ganhos fez com o sistema se comportasse de forma oscilatória piorando os resultados.

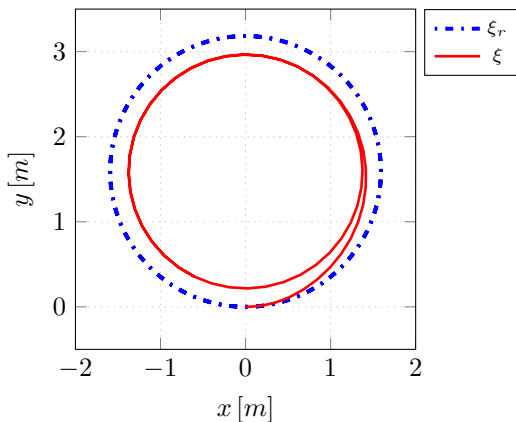


Figura 5.69 – Trajetória C3 com CMD1 com camada limite - experimental.

Os resultados com a estrutura de controle com o algoritmo *super-twisting*, como já esperado, apresentaram melhor exatidão. A trajetória C2 realizada pelo robô é mostrada na Figura 5.70.

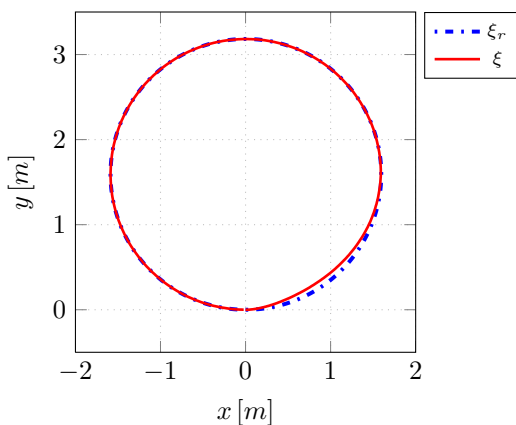


Figura 5.70 – Trajetória C2 sob controle *super-twisting* - experimental.

Esta trajetória foi realizada com erros de posição e orientação x_e , y_e e θ_e , ver Figuras 5.71 e 5.72, chaveando em torno de zero com picos máximos

de $0,01m$, $1,5 \times 10^{-3}m$ e $0,015rad$, respectivamente.

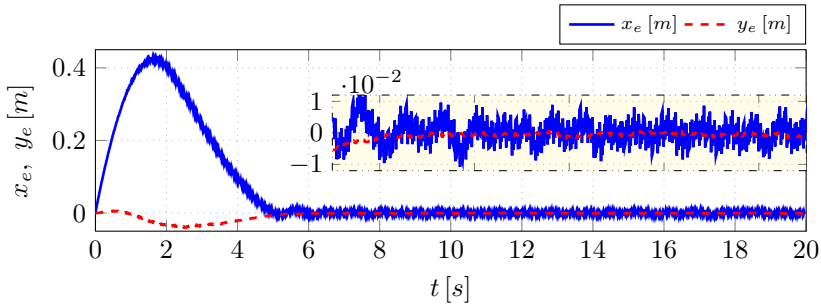


Figura 5.71 – Sinais dos erros x_e e y_e sob controle *super-twisting* - experimental.

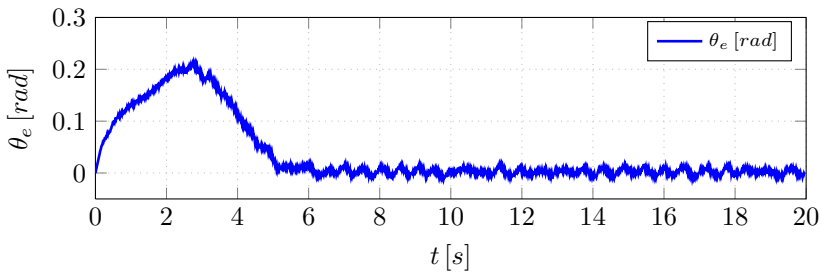


Figura 5.72 – Sinal do erro θ_e sob controle *super-twisting* - experimental.

A exemplo do caso anterior esses sinais e os sinais de velocidade do robô, mostrados nas Figuras 5.73 e 5.74, apresentam uma componente de sobressinal de chaveamento de alta frequência com amplitude pequena.

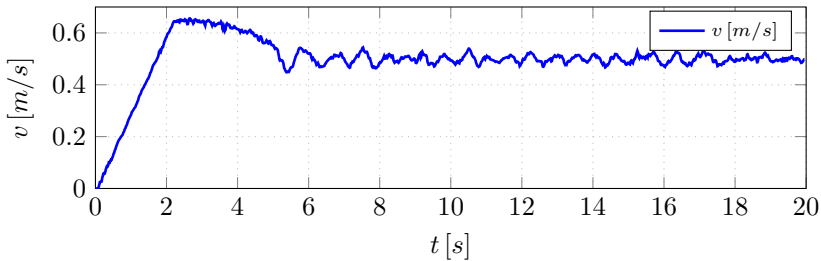


Figura 5.73 – Velocidade linear v sob controle *super-twisting* - experimental.

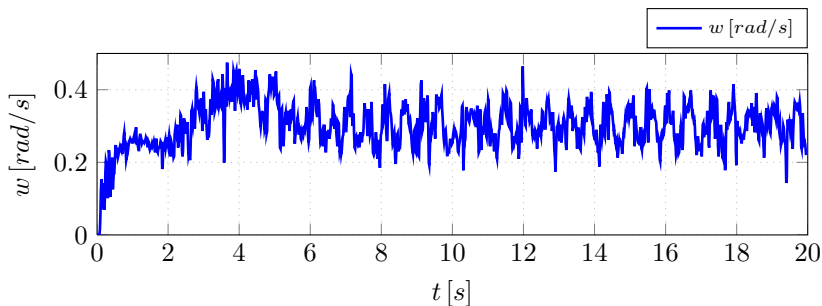


Figura 5.74 – Velocidade linear v sob controle *super-twisting* - experimental.

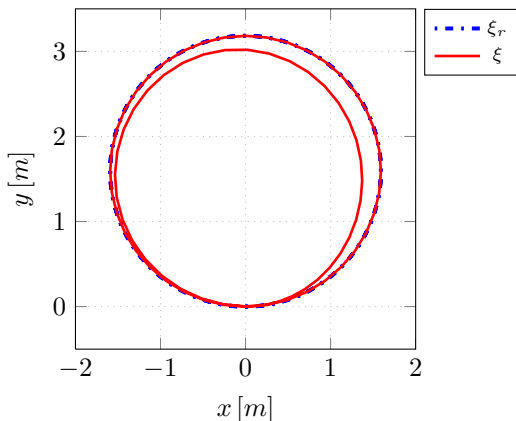


Figura 5.75 – Trajetória C3 sob controle *super-twisting*.

O teste com a trajetória C3 (ver Figura 5.75) confirma o resultado obtido em simulação, posto que a estrutura de controle com o algoritmo *super-twisting* oferece convergência com boa exatidão mesmo com o aumento da velocidade do robô. Os erros de posição e orientação convergem e chaveiam em torno de zero com picos máximos da ordem de $0,02m$ para x_e , $6 \times 10^{-3}m$ para y_e e $0,03rad$ para θ_e . Esses resultados mostram melhor robustez com o emprego do algoritmo *super-twisting* em relação à estrutura com camada limite. Verifica-se que os erros de postura são satisfatórios em relação à dimensão do robô, que tem $90cm$ de comprimento e $66cm$ de largura, sendo esses erros menores que 3% da largura do robô.

Para sintetizar os resultados experimentais e ter uma comparação melhor, em termos de robustez, entre as duas estratégias de controle aborda-

das aqui, considera-se os valores quadráticos médios, em Inglês Root Mean Square (RMS), dos erros de orientação θ_e e da expressão de erro $e(x_e, y_e) = \sqrt{x_e^2 + y_e^2}$, calculados a partir dos dados dos regimes permanentes dos experimentos no intervalo de $t = 10s$ a $t = 20s$. Os valores RMR dos erros considerados são mostrados na Tabela 5.6 e ao serem analisados verifica-se que a estrutura de controle proposta com associação do controle PD com o CMD2 super-twisting oferece melhores erros de rastreamento, comprovando a teoria de que esta estratégia oferece melhor robustez.

Tabela 5.6 – Valor RMS dos erros de rastreamento dos resultados experimentais.

| Trajetória | Variável | CMD1 com Camada Limite | CMD2 <i>super-twisting</i> |
|------------|---------------|------------------------|----------------------------|
| C2 | $e(x_e, y_e)$ | 0.1010 | 4.1×10^{-3} |
| | θ_e | 0.0668 | 6.1×10^{-3} |
| C3 | $e(x_e, y_e)$ | 0.6785 | 8.8×10^{-3} |
| | θ_e | 0.4426 | 1.31×10^{-2} |

5.8 Considerações Finais

Resultados de simulações e experimentais foram apresentados ao longo deste capítulo, para avaliar as características das estruturas dos controladores propostos. Dois cenários de simulação foram utilizados para os testes: (i) o cenário ideal, construído com base no modelo de postura do RMRD, com o objetivo de simular um ambiente ideal em que o comportamento do sistema é bem conhecido, mas sujeito a perturbações externas; (ii) e o cenário realístico, em se empregou o modelo de configuração do robô que, além da sua dinâmica incorpora também a dinâmica dos atuadores. Considerou-se, ainda, limites de atuação, limites de amostragem, incertezas paramétricas e perturbações externas. Esse cenário tem como objetivo emular os problemas enfrentados no controle de um sistema robótico.

Os estudos experimentais foram feitos com o uso da plataforma disponível para testes, Powerbot. Inicialmente, foram realizadas simulações em ambiente similar ao cenário realístico, em que se buscou replicar o controle interno do robô para auxiliar no ajuste dos controladores e para prever o comportamento do robô.

Diferentes arranjos de estruturas de controle foram estudados. No cenário ideal foram aplicadas três estruturas de controle diferentes compostas pelo controlador dinâmico, sintetizado com um controle de dinâmica inversa e um controle proporcional, em cascata com um dos seguintes controladores cinemáticos: (i) o primeiro projetado com a técnica de CMD1, (ii) o segundo

com a técnica de CMD1 com camada limite, (iii) e o último com a técnica de CMD2 *super-twisting*. Neste primeiro teste foi possível verificar que, em casos em que não há dinâmicas negligenciadas e limitações de atuação, todas as estruturas de controle estudadas oferecem robustez e bom desempenho, sem a necessidade de uma ação de controle mais elaborada que a de um controle proporcional na malha interna. Constatou-se, também, que o controlador cinemático proposto com a técnica CMD2 *super-twisting* oferece melhor exatidão, ou seja, menores erros de rastreamento, em virtude de sua propriedade de manter maior robustez que a técnica CMD1 frente a limitações da frequência de chaveamento.

No cenário realístico, foram estudados três controladores em cascata similares aos estudados no cenário ideal, entretanto, com o controlador dinâmico composto por controle de dinâmica inversa e controle PD. Essa troca permitiu que as estruturas de controle com o CMD1 com camada limite e com o CMD2 *super-twisting* tivessem respostas satisfatórias frente às dificuldades impostas pelo cenário. A estrutura com o CMD2 *super-twisting* obteve melhor robustez como esperado, já a estrutura com apenas o CMD1 sofreu efeitos severos de *chattering* e não conseguiu desempenhar o objetivo de rastreamento de trajetória.

Os testes experimentais foram realizados com duas estruturas de controle compostas de um controlador dinâmico PD e um controlador cinemático baseado: (i) na técnica de CMD1 com camada limite, (i) e outro na técnica de CMD2 *super-twisting*. Duas trajetórias circulares foram utilizadas nos testes, sendo uma com o dobro da velocidade da outra. Os resultados obtidos mostraram que a estrutura com o CMD2 *super-twisting* tem maior grau de robustez frente às dinâmicas não modeladas, incertezas paramétricas, perturbações externas e limitações de amostragem e atuação. Os resultados obtidos ao longo deste capítulo são sintetizados na Tabela 5.7, em que a quantidade de sinais + é utilizada para classificar o grau de robustez oferecido pelos controladores estudados.

Tabela 5.7 – Síntese dos resultados

| Controladores | Cenário Ideal | Cenário Realístico | Experimento |
|--|-----------------------|--------------------------------------|-------------|
| | Sistema bem conhecido | Incertezas paramétricas e estrutural | |
| | Perturbação externa | perturbação externa | |
| | | Limitação de atuação | |
| Propocional + CMD1 | + + + + | — | — |
| Propocional + CMD1 com camada limite | + + + | — | — |
| Proporcional + CMD2 <i>super-twisting</i> | + + + + + | — | — |
| PD + CMD1 | — | ruim | — |
| PD + CMD1 com camada limite | — | + + | + |
| PD + CMD2 <i>super-twisting</i> | — | + + + + | + + + |

* A quantidade de sinais + classifica o grau de robustez do controle.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Ao longo deste trabalho de tese tratou-se o problema de controle de rastreamento robusto de trajetórias para robôs móveis não holonômicos sobre rodas. A robustez requerida deve fazer frente a perturbações externas, incertezas paramétricas e estruturais, e limitações físicas do sistema. Assim, a robustez deve contemplar a dinâmica dos atuadores e outros dispositivos não considerados no projeto de controle e aspectos relacionados às limitações de amostragem e sua influência nas aplicações práticas.

O tipo de robô estudado se enquadra na classe de sistemas subatuados, cuja característica é possuir grau de atuação menor que grau de liberdade. Isso implica em menor número de atuadores, complexidade construtiva reduzida e menor peso quando comparado com sistemas similares totalmente atuados. Esse fato oferece vantagem em realizar tarefas com melhor eficiência energética. Ademais, o desenvolvimento de técnicas de controle para a categoria de sistemas subatuados é útil na construção de soluções redundantes de segurança para sistemas totalmente atuados. Contudo, em virtude das suas propriedades construtivas, essa categoria sofre restrições não holonômicas que tornam mais complexos o planejamento de trajetórias e o projeto de controladores.

A construção de modelos matemáticos para essa classe de sistema é, geralmente, mais complexa e resulta em modelos em espaço de estado compostos, para os quais soluções de controle em cascata são adequadas. O sistema considerado neste trabalho, o RMRD, tem restrições cinemáticas não holonômicas. A sua representação é feita por um modelo dinâmico e um cinemático, ambos não lineares. Entretanto, o primeiro é totalmente atuado e o segundo é subatuado, com características de acoplamento que agregam complexidade à síntese de controle e geração de trajetórias factíveis.

Assumindo-se que existe um sistema de navegação para o RMRD e que trajetórias factíveis são conhecidas, optou-se por solucionar o problema de rastreamento robusto de trajetórias para esse robô por meio do desenvolvimento de uma estratégia de controle baseada na técnica de controle por modo deslizante, pois oferece robustez e bom desempenho. Adicionalmente, foi também necessário tratar limitações de amostragem e dinâmicas negligenciadas características do problema, que restringem a implementação do controle por modos deslizantes de primeira ordem, forma regular da técnica. Para contornar essa dificuldade foi proposta uma estrutura de controle em cascata, empregando-se uma técnica de controle por modo deslizante de segunda ordem e a técnica de controle PD em paralelo. A associação das características dessas técnicas permitiu construir um controle robusto para o problema tratado. As técnicas de CMD2 tem como propriedade melhor robustez frente a limitações de amostragem e dinâmicas não modeladas em relação às técnicas CMD1 conforme pode ser constatado ao longo do trabalho. Essas oscilações têm relação direta com a constante de tempo das dinâmicas negligenciadas e podem ser reduzidas ainda mais por meio da sintonia do PD, que garanta uma resposta rápida do sistema em detrimento a dinâmicas negligenciadas.

A estrutura de controle proposta consiste de um controlador dinâmico em cascata com um controlador cinemático. O controle dinâmico foi sintetizado para compensar as forças e torques conhecidos atuantes no sistema e garantir o rastreamento de referência de velocidade com tempo de resposta pequeno, de maneira a atenuar efeitos de *chattering*. A técnica de dinâmica inversa associada ao controle PD foi utilizada para atender esses requisitos e sintetizar o controlador dinâmico que atua em uma malha interna de controle. Já o controlador cinemático foi sintetizado com base na técnica CMD2 *super-twisting*, que foi selecionada dentre outras devido a oferecer um algoritmo simples e com bom desempenho. Atuando na malha externa, o objetivo do controle cinemático é gerar referências de velocidade e rastrear com robustez as trajetórias de postura designadas para a locomoção autônoma do robô.

A robustez da estrutura de controle proposta foi avaliada e comparada com a robustez das estruturas desenvolvidas com CMD1 e CMD1 com camada limite, por meio de simulações e experimentos. A aplicação da camada limite à técnica CMD1 permite contornar os efeitos de *chattering*, que causam comportamento oscilatório indesejado ao CMD1. Entretanto, limitações de robustez puderam ser melhoradas com o controle proposto.

Com a realização desse trabalho pode-se obter como contribuições:

- Melhoria na robustez de controle de rastreamento de trajetórias por modos deslizantes para RMRs não holonômicos.

- Construção de uma estrutura de controle por modos deslizantes com boa robustez frente a dinâmicas não modeladas e limitações de amostragem.
- Síntese de uma superfície de deslizamento para a solução do problema de rastreamento de um conjunto de trajetórias para um RMRD.
- Construção de ambiente realístico para testes de simulação baseado em dados da plataforma Powerbot.

Essas contribuições foram úteis para publicação de alguns trabalhos em anais:

- E. S. Elyoussef, N. A. Martins, D. W. Bertol et al., “On a Wheeled Mobile Robot Trajectory Tracking Control: 1st and 2nd Order Sliding Modes Applied to a Compensated Inverse Dynamics”, em *11th Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM XI*, jan. de 2010;
- E. S. Elyoussef, N. A. Martins, D. W. Bertol et al., “On a Wheeled Mobile Robot Tracking Control: Sliding Mode Control Design”, em *XVII Congresso Brasileiro de Automática*, set. de 2010;
- E. ElYoussef, E. De Pieri, U. Moreno et al., “Super-twisting sliding modes tracking control of a nonholonomic wheeled mobile robot”, em *10th International IFAC Symposium on Robot Control, SYROCO’12*, 2012;

e para o envio de um trabalho para publicação em periódico:

- E. S. ElYoussef, E. R. De Pieri, U. F. Moreno et al., “PD-Super-Twisting Second Order Sliding Mode Tracking Control for a Differential Wheeled Mobile Robot”, *IEEE /ASME Transactions on Mechatronics*, 2013, em revisão.

6.1 Trabalhos Futuros

O desenvolvimento das pesquisas de tese, abriu espaço para alguns trabalhos futuros, listados a seguir:

- **Estudo formal de estabilidade do algoritmo super-twisting por meio de funções de Lyapunov** - A maioria das técnicas de CMD2 foi desenvolvida a partir de análises de estabilidade das dinâmicas da variável de chaveamento. Essas dinâmicas foram descritas por meio de inclusões

diferenciais para estabelecer critérios de convergência por meio de análises geométricas das suas respostas temporais. Uma prova de estabilidade com base em uma propriedade denominada homogeneidade foi desenvolvida por Levant [56]. Mais tarde a estabilidade de algoritmos baseados nessa técnica foi provada por meio de funções de Lyapunov para uma categoria de sistemas simples sujeita a perturbações variantes no tempo e limitadas. Esses avanços no estudo de estabilidade abrem espaço para que se busque funções de Lyapunov para a prova de estabilidade da aplicação das técnicas de CMD2 a uma classe de sistemas mais abrangente. Como tarefa futura pretende-se desenvolver por meio da metodologia proposta por [textcitePolyakov2008](#) uma função de Lyapunov para o algoritmo *super-twisting* considerando uma classe de sistemas que englobe RMRs não holonômicos.

- **Estudo de estabilidade da estratégia de controle em cascata** - A síntese dos controladores presentes na malha interna e na malha externa, que compõem a cascata de controle proposta, foi realizada de tal forma a garantir a estabilidade individual de cada malha. Embora nenhuma análise formal da interação entre as malhas de controle tenha sido realizada, constatou-se por meio de simulações e experimentos a estabilidade do sistema em malha fechada. Resta, portanto, desenvolver uma demonstração analítica desse resultado. Uma opção para realizar esse estudo é o emprego da teoria de *singular perturbation*, considerando a malha externa como a dinâmica lenta e a malha interna como a dinâmica rápida.
- **Obter métricas de ajuste dos ganhos dos controladores** - Os estudos propostos nos dois itens acima possibilitam buscar métricas bem definidas que possam auxiliar na sintonia dos ganhos dos controladores, de forma a contornar as dificuldades encontradas nos ajustes dos parâmetros dos controladores por modos deslizantes.
- **Extensão da estrutura de controle para uma classe de sistemas não holonômicos e subatuados** - A estrutura de controle proposta combina as qualidades do CMD2 *super-twisting* e do controle PD, que se complementam quando utilizados em cascata, pois o CMD oferece grau elevado de robustez, ao passo que o PD age sobre dinâmicas não modeladas auxiliando a manter a robustez em detrimento a dinâmicas não modeladas. Logo, a extensão dessa estrutura de controle para uma classe de sistemas não holonômicos seria um resultado importante.
- **Estudo da geração de trajetórias factíveis** - A solução para o problema de deslocamento autônomo de um robô móvel está intrinseca-

mente atrelada à geração de trajetórias que atenda a suas propriedades e limitações cinemáticas e dinâmicas. Trajetórias, por exemplo, que respeitem as restrições de movimento, perfis de velocidade e de aceleração implicam em melhor desempenho do comando do robô.

Bibliografia

- [1] B. Siciliano e O. Khatib, *Handbook of Robotics*. Springer, 2008, ISBN: 978-3-540-23957-4.
- [2] G. Campion e W. Chung, “Wheeled Robots”, em *Handbook of Robotics*, B. Siciliano e O. Khatib, eds., Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008, cap. Part B 17, pp. 391–410.
- [3] G. Campion, G. Bastin e B Dandrea-Novel, “Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 12, n^o 1, pp. 47–62, fev. de 1996.
- [4] L. C. Figueiredo e F. G. Jota, “Introdução ao Controle de Sistemas Não-holômicos”, *Revista de Controle & Automação*, vol. 15, n^o 3, 2004.
- [5] R. M. Murray, Z. Li e S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, 1994, ISBN: 9780849379819.
- [6] I. Kolmanovsky e N. H. McClamroch, “Developments in Nonholonomic Control Problems”, *IEEE Control Systems*, vol. 15, n^o 6, pp. 20–36, 1995.
- [7] I. Fantoni e R. Lozano, *Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems*, sér. Communications and Control Engineering Series. Springer Verlag, 2001, ISBN: 978185 2334239.
- [8] G. V. Raffo, “Robust Control Strategies for a QuadRotor Helicopter. An Underactuated Mechanical System”, tese de doutorado, Universidad de Sevilla, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Sevilla, España, 2011.
- [9] Y. Kanayama, Y. Kimura, F. Miyazaki e T. Noguchi, “A stable tracking control method for an autonomous mobile robot”, em *IEEE International Conference of Robotics and Automation*, Cincinnati, OH, USA, maio de 1990, pp. 384–389, ISBN: 0-8186-9061-5.

- [10] G. Oriolo, A. D. Luca e M. Vendittelli, “WMR Control Via Dynamic Feedback Linearization: Design, Implementation, and Experimental Validation”, *IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY*, vol. 10, n° 6, nov. de 2002.
- [11] B. Kim e P. Tsiotras, “Controllers for Unicycle-Type Wheeled Robots: Theoretical Results and Experimental Validation”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, n° 3, pp. 294–307, jun. de 2002.
- [12] H.-S. Shim e Y.-G. Sung, “Stability and four-posture control for nonholonomic mobile robots”, *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. 20, n° 1, pp. 148 –154, fev. de 2004, ISSN: 1042-296X. DOI: [10.1109/TRA.2003.819730](https://doi.org/10.1109/TRA.2003.819730).
- [13] Y. Wu, B. Wang e G. Zong, “Finite-time tracking controller design for nonholonomic systems with extended chained form”, *Circuits and Systems II: Express Briefs, IEEE Transactions on*, vol. 52, n° 11, pp. 798 –802, nov. de 2005, ISSN: 1549-7747. DOI: [10.1109/TCSII.2005.852528](https://doi.org/10.1109/TCSII.2005.852528).
- [14] C. B. Low e D. Wang, “GPS-Based Tracking Control for a Car-Like Wheeled Mobile Robot With Skidding and Slipping”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 13, n° 4, pp. 480–484, ago. de 2008.
- [15] E. S. Elyoussef, N. A. Martins, D. W. Bertol, E. R. Pieri e M. Jungers, “On a Wheeled Mobile Robot Tracking Control: Sliding Mode Control Design”, em *XVII Congresso Brasileiro de Automática*, set. de 2010.
- [16] R. Fierro e F. L. Lewis, “Control of a Nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into Dynamics”, em *34th Conference on Decision & Control*, New Orleans, LA, dez. de 1995, pp. 3805–3810.
- [17] J.-M. Yang e J.-H. Kim, “Sliding Mode Control for Trajectory Tracking of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 15, n° 3, jun. de 1999.
- [18] A. Ferrara e M. Rubagotti, “Second-order sliding-mode control of a mobile robot based on a harmonic potential field”, *IET Control Theory and Applications*, vol. 2, n° 9, pp. 807–818, mar. de 2008.
- [19] D. Chwa, “Sliding-Mode Tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots in Polar Coordinates”, *IEE Proceedings on Control Systems Technology*, vol. 12, n° 4, pp. 637–644, jul. de 2004.
- [20] P. Coelho e U. Nunes, “Path-following control of mobile robots in presence of uncertainties”, *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 21, n° 2, pp. 252 –261, abr. de 2005, ISSN: 1552-3098. DOI: [10.1109/TRO.2004.837240](https://doi.org/10.1109/TRO.2004.837240).

- [21] E. S. Elyoussef, N. A. Martins, D. W. Bertol, E. R. Pieri e M. Jungers, “On a Wheeled Mobile Robot Trajectory Tracking Control: 1st and 2nd Order Sliding Modes Applied to a Compensated Inverse Dynamics”, em *11th Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM XI*, jan. de 2010.
- [22] E. ElYoussef, E. De Pieri, U. Moreno, M. Jungers et al., “Super-twisting sliding modes tracking control of a nonholonomic wheeled mobile robot”, em *10th International IFAC Symposium on Robot Control, SYROCO’12*, 2012.
- [23] T. Das e I. N. Kar, “Design and Implementation of an Adaptive Fuzzy Logic-Based Controller for Wheeled Mobile Robots”, *IEEE Proceedings on Control Systems Technology*, vol. 14, n° 3, pp. 501–510, maio de 2006.
- [24] R. Silva-Ortigoza, G. Silva-Ortigoza, V. Hernandez-Guzman, V. Barrientos Sotelo, J. Albarran-Jimenez e V. Silva-Garcia, “Trajectory tracking in a mobile robot without using velocity measurements for control of wheels”, *Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)*, vol. 6, n° 7, pp. 598–607, dez. de 2008, ISSN: 1548-0992. DOI: [10.1109/TLA.2008.4917431](https://doi.org/10.1109/TLA.2008.4917431).
- [25] K. Shojaei, A. M. Shahri e A. Tarakameh, “Adaptive feedback linearizing control of nonholonomic wheeled mobile robots in presence of parametric and nonparametric uncertainties”, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 27, n° 1, pp. 194–204, 2011, ISSN: 0736-5845. DOI: [10.1016/j.rcim.2010.07.007](https://doi.org/10.1016/j.rcim.2010.07.007).
- [26] C. Anupoju, C.-Y. Su e M. Oya, “Robust adaptive motion control of uncertain nonholonomic mechanical systems including actuator dynamics”, em *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA ’04. 2004 IEEE International Conference on*, vol. 4, maio de 2004, 3525–3530 Vol.4. DOI: [10.1109/ROBOT.2004.1308799](https://doi.org/10.1109/ROBOT.2004.1308799).
- [27] J. Guldner e V. I. Utkin, “Stabilization of non-holonomic mobile robots using Lyapunov functions for navigation and sliding mode control”, em *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, Lake Buena Vista, FL, dez. de 1994, pp. 2967–2972.
- [28] F. U. Rehman e M. M. Ahmed, “Steering control algorithm for a class of wheeled mobile robots”, *IET Control Theory Appl.*, vol. 1, n° 4, pp. 915–924, 2007.
- [29] C. S. Júnior e E. M. Hemerly, “Controle de Robôs Móveis Utilizando o Modelo Cinemático”, *Revista de Controle & Automação*, vol. 14, n° 4, pp. 384–392, out. de 2003.

- [30] W. E. Dixon, D. M. Dawson, E. Zergeroglu e A. Behal, “Adaptive Tracking Control of a Wheeled Mobile Robot via an Uncalibrated Camera System”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 31, n° 3, pp. 341–352, jun. de 2001.
- [31] W. Dong e K.-D. Kuhnert, “Robust Adaptive Control of Nonholonomic Mobile Robot with Parameter and Nonparameter Uncertainties”, *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 21, n° 2, pp. 261–266, abr. de 2005.
- [32] B. S. Park, S. J. Yoo, J. B. Park e Y. H. Choi, “Adaptive Neural Sliding Mode Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots With Model Uncertainty”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, n° 1, pp. 207–214, jan. de 2009.
- [33] C. S. Júnior e E. M. Hemerly, “Neural network-based controllers for mobile robot”, em *Proceedings in Sixth Brazilian Symposium on Neural Networks*, nov. de 2000, pp. 50–55.
- [34] N. A. Martins, D. W. Bertol, W. Lombardy e E. R. Pieri, “Trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot: A suggested neural torque controller based on the sliding mode theory”, em *International Workshop on Variable Structure Systems (VSS '08)*, jun. de 2008, pp. 384–389.
- [35] N. A. Martins, D. Bertol, W. Lombardi, E. R. Pieri e E. Castelan, “Trajectory Tracking of a Nonholonomic Mobile Robot With Parametric and Nonparametric Uncertainties: A Proposed Neural Control”, em *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, jun. de 2008.
- [36] Z.-G. Hou, A.-M. Zou, L. Cheng e M. Tan, “Adaptive Control of an Electrically Driven Nonholonomic Mobile Robot via Backstepping and Fuzzy Approach”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 17, n° 4, pp. 803–815, jul. de 2009.
- [37] T. H. Lee, H. K. Lam, F. H. F. Leung e P. K. S. Tam, “A Practical Fuzzy Logic Controller for the Path Tracking of Wheeled Mobile Robots”, *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 23, n° 2, pp. 60–65, abr. de 2003.
- [38] D. Wang e G. Xu, “Full-state tracking and internal dynamics of nonholonomic wheeled mobile robots”, *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, vol. 8, n° 2, pp. 203–214, June. DOI: [10.1109/TMECH.2003.812832](https://doi.org/10.1109/TMECH.2003.812832).
- [39] V. I. Utkin, J. Guldner e J. Shi, *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*, Second, F. L. Lewis e S. S. Ge, eds. CRC Press, 2009, ISBN: 13:978-1-4200-6560-2.

- [40] H. Lee e V. Utkin, “Chattering analysis”, em *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*, sér. Lecture Notes in Control and Information Sciences, C. Edwards, E. Fossas Colet e L. Fridman, eds., vol. 334, Springer Berlin / Heidelberg, 2006, pp. 107–121, ISBN: 978-3-540-32800-1. endereço: http://dx.doi.org/10.1007/11612735_6.
- [41] G. Bartolini, A. Ferrara, E. Usai e V. I. Utkin, “On Multi-Input Chattering-Free Second-Order Sliding Mode Control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, nº 9, pp. 1711–1717, set. de 2000.
- [42] G. Bartolini, A. Ferrara e E. Usai, “Chattering Avoidance by Second-Order Sliding Mode Control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, nº 2, pp. 241–246, fev. de 1998.
- [43] I. Boiko, L. Fridman, A. Pisano e E. Usai, “A comprehensive analysis of chattering in second order sliding mode control systems”, em *Modern Sliding Mode Control Theory*, sér. Lecture Notes in Control and Information Sciences, G. Bartolini, L. Fridman, A. Pisano e E. Usai, eds., vol. 375, Springer Berlin / Heidelberg, 2008, pp. 23–49, ISBN: 978-3-540-79015-0. endereço: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-79016-7_2.
- [44] A. Levant, “Sliding order and Sliding accuracy in sliding mode control”, *Int. Journal of Control*, vol. 58, nº 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [45] N. Sarkar, X. Yun e V. Kumar, “Control of mechanical systems with rolling constraints application to dynamic control of mobile robots”, *The International Journal of Robotics Research*, vol. 13, nº 1, pp. 55–69, 1994.
- [46] P. Coelho e U. Nunes, “Lie algebra application to mobile robot control: a tutorial”, *Robotica*, vol. 21, nº 05, pp. 483–493, 2003.
- [47] L. E. M. de Lima, “Modelagem e controle de um robo movel a rodas”, diss. de mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, 1995.
- [48] L.-W. Tsai, *Robot Analysis: the Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. John Wiley & Sons, 1999, ISBN: 0-471-32593-7.
- [49] M. W. Spong, S. Hutchinson e M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, 1ª ed. John Wiley & Sons, 2006, ISBN: 0-471-64990-2.
- [50] R. A. DeCarlo, S. H. Zak e G. P. Matthews, “Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial”, em *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, mar. de 1988, pp. 212–232.

- [51] J. Y. Hung, W. Gao e J. C. Hung, “Variable Struture Control: A Survey”, *IEEE Transactions on Industrial Eletronics*, vol. 40, n° 1, pp. 2–22, fev. de 1993.
- [52] L. Fridman e A. Levant, “Higher order sliding modes”, *Sliding mode control in engineering*, vol. 11, pp. 53–102, 2002.
- [53] I. Boiko e L. Fridman, “Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers”, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 50, n° 9, pp. 1442 –1446, 2005, ISSN: 0018-9286. DOI: [10.1109/TAC.2005.854655](https://doi.org/10.1109/TAC.2005.854655).
- [54] I. Boiko e L. Fridman, “Frequency domain analysis of second order sliding modes”, em *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*, sér. Lecture Notes in Control and Information Sciences, C. Edwards, E. Fossas Colet e L. Fridman, eds., vol. 334, Springer Berlin / Heidelberg, 2006, pp. 125–142, ISBN: 978-3-540-32800-1. endereço: http://dx.doi.org/10.1007/11612735_7.
- [55] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant e E. Usai, “Variable structure systems, sliding mode and nonlinear control”, em, sér. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Berlin / Heidelberg, 1999, vol. 247, cap. On second order sliding mode controllers, pp. 329–350, ISBN: 978-1-85233-197-9.
- [56] A. Levant, “Principles of 2-Sliding Mode Design”, *Automatica*, vol. 43, n° 4, pp. 576–586, 2007.
- [57] T. Floquet, J.-P. Barbot e W. Perruquetti, “Higher-order Sliding Mode Stabilization for a Class of Nonholonomic Perturbed Systems”, *Automatica*, vol. 39, pp. 1077–1083, 2003.
- [58] A. Ferrara e L. Magnani, “Motion Control of Rigid Robot Manipulators via First and second Order sliding Modes”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 48, pp. 23–36, 2007.
- [59] L. Capisani, T. Facchinetti e A. Ferrara, “Second order sliding mode real-time networked control of a robotic manipulator”, em *Conference on Emerging Technologies and Factory Automation - ETFA.*, set. de 2007, ISBN: 978-1-4244-0825-2.
- [60] E. Punta, “Multivariable Second Order Sliding Mode Control of Mechanical Systems”, em *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*, dez. de 2006, pp. 13–15.
- [61] J. E. Normey-Rico e E. F. Camacho, *Control of Dead-time Processes*. Springer, 2007.

- [62] P. Morin e C. Samson, “Motion Control of Wheeled Mobile Robots”, em *Handbook of Robotics*, B. Siciliano e O. Khatib, eds., Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008, cap. Part E 34, pp. 799–826.
- [63] K. Buys, S. Bellens, W. Decre, R. Smits, E. Scioni, T. De Laet, J. De Schutter e H. Bruyninckx, “Haptic coupling with augmented feedback between two kuka light-weight robots and the pr2 robot arms”, em *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2011 IEEE/RSJ International Conference on*, 2011, pp. 3031–3038. DOI: [10.1109/IROS.2011.6094925](https://doi.org/10.1109/IROS.2011.6094925).
- [64] E. S. ElYoussef, E. R. De Pieri, U. F. Moreno e M. Jungers, “PD-Super-Twisting Second Order Sliding Mode Tracking Control for a Differencial Wheeled Mobile Robot”, *IEEE /ASME Transactions on Mechatronics*, 2013, em revisão.

